

القسم العلمي
الفصل الدراسي الثاني



تطبيقات

الرياضيات

الجزء الخاص بالشرح و التمارين
يشمل مسائل جديدة تقيس مستويات عليا من التفكير



المعلم

إعداد نخبة من خبراء التعليم

جديد...

يُصرف مع الكتاب الجزء الخاص
بالامتحانات بنظام أسئلة
الاختيار من متعدد

2

ثانوي
2020

B612

الديناميكا

الوحدة

1



الدرس 1 الحركة المستقيمة.

الدرس 2 الحركة منتظمة التغير في خط مستقيم.

الدرس 3 الحركة الرأسية تحت تأثير الجاذبية الأرضية (السقوط)

الدرس 4 قانون الجذب العام.

B612



الدرس

1

الحركة المستقيمة

بعض التعاريف والمفاهيم الأساسية

الحركة

هى تغير موضع الجسم بتغير الزمن بالنسبة إلى موضع جسم آخر،
والسكون والحركة مفهوم نسبى فراكب القطار قد يبدو ساكناً بالنسبة لراكب آخر فى نفس
القطار بينما كلاهما يعتبر متحركاً بالنسبة لشخص يقف على الطريق أثناء سير القطار،
وهناك أنواع عديدة للحركة فمنها :

١ حركة انتقالية يتحرك فيها الجسم بين نقطتين تسمى الأولى نقط البداية والثانية نقطة النهاية
ومنها نوعان :

(أ) حركة فى خط مستقيم مثل حركة جسم يسقط من نافذة.

(ب) حركة فى خط منحنى مثل حركة المقذوفات.

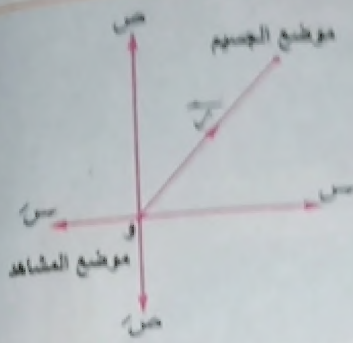
٢ حركة دوارانية واهتزازية مثل حركة الكواكب وحركة بندول الساعة وهى خارج نطاق
دراستنا فى هذا الكتاب.

الجنسيم

هو نقطة افتراضية يتم استخدامها لدراسة حركة الجسم حيث يتم تمثيل حركة الجسم كله
بحركة نقطة مع إهمال أى حركة داخلية أخرى للجسم مثل الحركة الدورانية أو الاهتزازية.

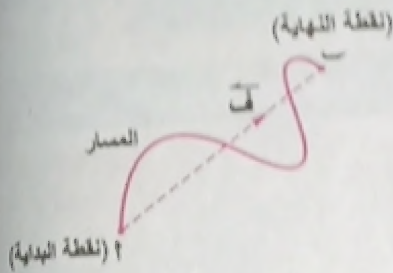
متجه الموضع لجسيم

هو المتجه الذى تنطبق نقطة بدايته مع موضع المشاهد لعملية الحركة (و) ونقطة نهايته مع موضع الجسيم فى الوقت الحالى ويرمز له عادة بالرمز \vec{r} حيث :

$$\vec{r} = \vec{r}_S - \vec{r}_O$$


الإزاحة والمسافة

إذا تحركت سيارة من الموضع الابتدائى (أ) إلى أن وصلت الموضع النهائى (ب) متبعة المسار المبين بالشكل المقابل ، فإن :



متجه الإزاحة

هو المتجه الذى تمثله القطعة المستقيمة الموجهة \vec{r} التى تنطبق نقطة بدايتها (أ) مع الموضع الابتدائى للجسيم ونقطة نهايتها (ب) مع الموضع النهائى للجسيم ويرمز لها بالرمز \vec{r}

أى أن لتحديد متجه الإزاحة يلزم معرفة :

- **مقدار الإزاحة** : وهو البعد بين الموضع الابتدائى والموضع النهائى للحركة $\|\vec{r}\| = \|\vec{r}\|$
- **اتجاه الإزاحة** : وهو اتجاه حركة الجسيم من الموضع الابتدائى إلى الموضع النهائى.

المسافة

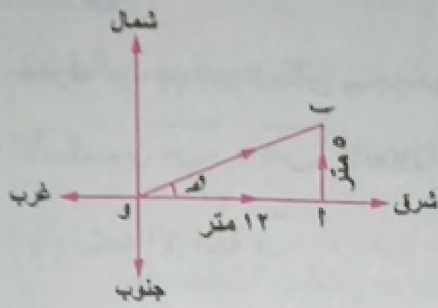
هى طول المسار الفعلى الذى قطعه الجسيم وهى كمية قياسية.

ملاحظات :

- مقدار الإزاحة الحادثة لجسيم يساوى المسافة المقطوعة فى حالة الحركة فى خط مستقيم فى اتجاه ثابت فقط.
- إذا تحرك جسيم ثم عاد إلى نفس النقطة التى تحرك منها فإن مقدار الإزاحة الحادثة له = صفر.
- مقدار الإزاحة \geq المسافة المقطوعة.

مثال ١

إذا تحرك جسم شرقاً مسافة ١٢ متراً ثم تحرك بعد ذلك مسافة ٥ أمتار شمالاً ثم توقف.
احسب المسافة والإزاحة الحادثة للجسم.



الحل

• المسافة التي قطعها الجسم = ١٢ + ٥ = ١٧ متر

• الإزاحة ممثلة بالقطعة المستقيمة الموجهة \vec{OF} حيث :

$$\text{مقدار الإزاحة} = \sqrt{(12)^2 + (5)^2} = 13 \text{ متر}$$

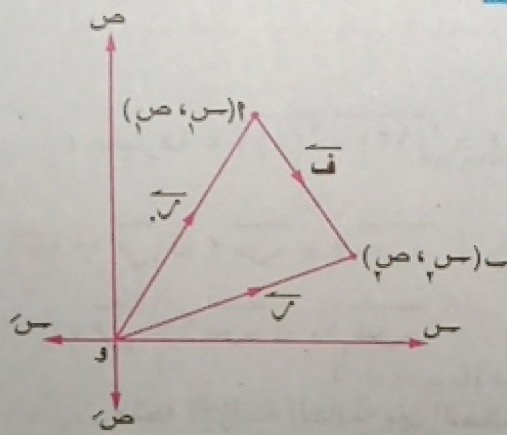
- اتجاه الإزاحة : حيث $\tan \theta = \frac{5}{12}$ فإن : $\theta \approx 22.62^\circ$

أي أن مقدار الإزاحة ١٣ متر واتجاهها شمال الشرق بزاوية قياسها 22.62°

العلاقة بين متجه الموضع ومتجه الإزاحة

نفرض أن (و) هي موضع المشاهد لحركة جسم من موضعه الابتدائي عند النقطة (١) إلى موضعه النهائي عند النقطة (٢) بين لحظتين زمنيتين متتاليتين.

فإذا رمزنا لمتجه الموضع عند اللحظة الابتدائية (١) بالرمز \vec{r}_1 ولمتجه الموضع عند اللحظة النهائية (٢) بالرمز \vec{r}_2 فإن متجه الإزاحة :



$$\vec{F} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (3\hat{s} - 1\hat{s}) + (1\hat{v} - 2\hat{v}) = 2\hat{s} - \hat{v}$$

$$||\vec{F}|| = \sqrt{(3-1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{2} = 1.41$$

وإذا كان \hat{u} متجه وحدة في اتجاه \vec{F} فإن : $\hat{u} = \frac{\vec{F}}{||\vec{F}||}$

مثال ٢

يتحرك جسيم بحيث كان متجه موضعه \vec{r} يعطى كدالة فى الزمن بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين \vec{e}_1 ، \vec{e}_2 بالعلاقة : $\vec{r} = (2 + t)\vec{e}_1 + (2 - t)\vec{e}_2$ أوجد :

١ متجه الإزاحة \vec{f}

٢ معيار الإزاحة الحادثة حتى اللحظة $t = 4$ ثانية.

٣ معيار الإزاحة الحادثة بين اللحظتين $t = 2$ إلى $t = 4$

الحل

$$\text{١} \quad \vec{f} = \vec{r} - \vec{r}_0 = (2 + t)\vec{e}_1 + (2 - t)\vec{e}_2 - [2\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2] = 2\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + t(\vec{e}_1 + \vec{e}_2)$$

$$\text{٢} \quad \therefore \vec{r} = 2\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + t(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) \quad \vec{r}_0 = 2\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 \quad \therefore \vec{f} = 2\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + t(\vec{e}_1 + \vec{e}_2)$$

\therefore متجه الإزاحة الحادثة حتى اللحظة $t = 4$ هو $\vec{r}_4 - \vec{r}_0$.

$$\vec{r}_4 - \vec{r}_0 = 4\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2$$

، معيارها $|\vec{r}_4 - \vec{r}_0| = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$ وحدة طول.

$$\text{٣} \quad \therefore \vec{r}_4 - \vec{r}_2 = 4\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - (2\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 2(\vec{e}_1 + \vec{e}_2)) = 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$$

$$\vec{r}_2 = 2\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 2(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) = 4\vec{e}_1$$

\therefore متجه الإزاحة الحادثة بين اللحظتين $t = 2$ و $t = 4$

$$\vec{r}_4 - \vec{r}_2 = 4\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - 4\vec{e}_1 = 4\vec{e}_2$$

، معيارها $|\vec{r}_4 - \vec{r}_2| = \sqrt{4^2 + 0^2} = 4$ وحدة طول.

متجه السرعة - السرعة

- * **متجه السرعة (Velocity)** هو كمية متجهه تعبر عن المعدل الزمني للتغير في موضع الجسم.
- * **السرعة (Speed)** هي كمية قياسية تعبر عن معيار متجه السرعة.

تعريف

متجه سرعة جسيم هو المتجه الذي معياره يساوي قيمة السرعة وينطبق اتجاهه على اتجاه الحركة.

فمثلاً : « ٩٠ كم/س » تعبر عن « السرعة » أما « ٩٠ كم/س شمالاً » تعبر عن « متجه السرعة »

وحدات قياس السرعة

هي : الكيلومتر في الساعة أي (كم/س) ، المتر في الثانية أي (م/ث) ، السنتيمتر في الثانية أي (سم/ث).

حيث

أي أن

$$\begin{aligned} 1 \text{ كم/س} &= \frac{1000 \text{ متر}}{3600 \text{ ثانية}} = \frac{5}{18} \text{ م/ث} \\ 1 \text{ كم/س} &= \frac{1000 \text{ سم}}{3600 \text{ ثانية}} = \frac{250}{9} \text{ سم/ث} \end{aligned}$$

فمثلاً : $27 \text{ كم/س} = \frac{5}{18} \times 27 = 7.5 \text{ م/ث}$

$4 \frac{1}{3} \text{ كم/س} = \frac{250}{9} \times 4 \frac{1}{3} = 125 \text{ سم/ث}$

$20 \text{ م/ث} = \frac{18}{5} \times 20 = 72 \text{ كم/س}$

الحركة المنتظمة

هي الحالة التي يكون فيها كل من معيار واتجاه متجه السرعة ثابتاً.

* **ومن ذلك نتوصل إلى الملاحظتين الهامتين الآتيتين على الحركة المنتظمة :**

لاحظ أن

الحركة المستقيمة هي
الحركة في خط مستقيم

١ **ثبات اتجاه متجه السرعة :** وهذا يعني أن الجسيم يتحرك في

اتجاه ثابت (يتحرك في خط مستقيم ثابت).

٢ **ثبات معيار متجه السرعة :** وهذا يعني أن الجسيم يقطع في

اتجاه حركته مسافات متساوية خلال فترات زمنية متساوية أي (يتحرك بسرعة ثابتة).

ملاحظة :

في حالة الحركة المنتظمة يكون :

- ١ معيار الإزاحة الحادثة = المسافة المقطوعة
- ٢ العلاقة بين متجهي الإزاحة والسرعة هي : $\vec{v} = \frac{\vec{r}}{t}$
- ٣ يسمى متجه السرعة الثابتة في هذه الحالة بمتجه السرعة المنتظمة وهي السرعة التي يقطع بها الجسم ازاحات متساوية في أزمنة متساوية.

الحركة المتغيرة

إذا لم تكن الحركة منتظمة فإننا نسميها متغيرة والحركة المتغيرة يتغير متجه سرعة الجسم في المقدار أو في الاتجاه أو في كليهما من لحظة إلى أخرى.

* **لاحظ أن :** السيارة التي تقطع مسافة ثابتة ٨٠ كم كل ساعة في مسار دائري لها سرعة ثابتة « ٨٠ كم/س » ولكن متجه سرعتها ليس ثابتاً لأن اتجاه الحركة يتغير.

ملاحظة :

في حالة الحركة في خط مستقيم ثابت نفرض متجه وحدة \vec{u} في اتجاه يوازي اتجاه الحركة وعلى ذلك فإن :

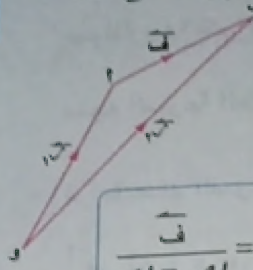
- * \vec{v} (القياس الجبري لمتجه الإزاحة) = $\|\vec{v}\|$ إذا كانت الإزاحة في نفس اتجاه \vec{u}
- أ ، - $\|\vec{v}\|$ إذا كانت الإزاحة في عكس اتجاه \vec{u}
- * \vec{v} (القياس الجبري لمتجه السرعة) = $\|\vec{v}\|$ إذا كان اتجاه السرعة في نفس اتجاه \vec{u}
- أ ، - $\|\vec{v}\|$ إذا كان اتجاه السرعة في عكس اتجاه \vec{u}

السرعة المتوسطة - متجه السرعة المتوسطة

* السرعة المتوسطة (\vec{v}_m) خلال فترة زمنية هي خارج قسمة المسافة الكلية في هذه الفترة على مقدار هذه الفترة الزمنية وهي (كمية قياسية)

$$\text{أي أن } \vec{v}_m = \frac{\text{المسافة الكلية}}{\text{الزمن الكلي}}$$

* متجه السرعة المتوسطة (\vec{v}_m) خلال فترة زمنية هو خارج قسمة متجه الإزاحة في هذه الفترة على مقدار هذه الفترة الزمنية وهو (كمية متجهة) وإذا كان \vec{v}_1 ، \vec{v}_2 هما متجهي الموضع لجسيم عند اللحظتين الزمنيةتين t_1 ، t_2 على الترتيب



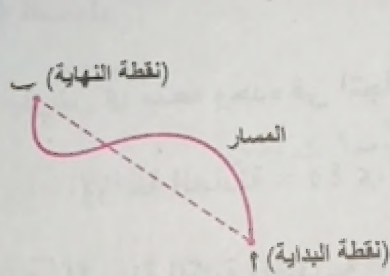
فإن متجه السرعة المتوسطة (\vec{v}_m) = $\frac{\text{الإزاحة الحادثة}}{\text{الزمن الكلي}} = \frac{\vec{r}}{t}$

* **لاحظ أن :** السرعة المتوسطة ليس بالضرورة أن تساوى معيار متجه السرعة المتوسطة.
* **المفهوم الفيزيائي للسرعة المتوسطة :** هي السرعة التي لو سار بها الجسم بانتظام خلال الفترة الزمنية لقطع نفس المسافة الكلية.

متجه السرعة اللحظية

إذا كانت الفترة الزمنية ($t_2 - t_1$) صغيرة جداً ومتوسطها اللحظة t فإن متجه السرعة في هذه الحالة يُعرف بمتجه السرعة اللحظية عند اللحظة t ويرمز له بالرمز \vec{v}

مثال توضيحي



إذا بدأ قائد سيارة رحلته بين مدينتين ١ ، ٢ ، متخذاً المسار المنحني المبين بالشكل. فإذا كان طول المسار ٢٤٠ كم بينما البعد بين المدينتين في حالة اتخاذه طريقاً مستقيماً هو ٢١٠ كم وقد أتم السائق رحلته في ٣ ساعات

وبطبيعة الحال أثناء الرحلة فإن قراءة عداد السرعة تتغير من لحظة لأخرى فأحياناً تكون ١٢٠ كم/ساعة وأخرى ٦٠ كم/ساعة وربما صفر كم/ساعة في حالة التوقف في محطة وقود أو استراحة ولكن في نهاية الأمر فإن :

١ السيارة سارت مسافة ٢٤٠ كم في فترة ٣ ساعات أي بمعدل ٨٠ كم لكل ساعة وهذا ما يسمى بالسرعة المتوسطة.

أي أن السرعة المتوسطة = $\frac{\text{المسافة الكلية}}{\text{الزمن الكلي}} = \frac{٢٤٠}{٣} = ٨٠ \text{ كم/س}$

٢ متجه السرعة المتوسطة مرتبط بالإزاحة الحادثة للجسم فالبرغم من أن السيارة سارت مسافة ٢٤٠ كم إلا أن الإزاحة الحادثة هي ٢١٠ كم في الاتجاه من أ إلى ب وعلى ذلك فإن :
 متجه السرعة المتوسطة = $\frac{\text{الإزاحة الحادثة}}{\text{الزمن الكلي}} = \frac{٢١٠}{٣} = ٧٠ \text{ كم/ساعة}$ في اتجاه أ ←

٣ قراءة عداد السرعة بالسيارة يدل على السرعة اللحظية

أي أن (١٢٠ كم/س ، ٦٠ كم/س ،) هي سرعات لحظية تختلف من لحظة لأخرى.

مثال ٣

قطعت سيارة مسافة ٤٥ كم على طريق مستقيم في زمن قدره $\frac{٣}{٤}$ ساعة ثم عادت فقطعت ٢٥ كم في الاتجاه المعاكس في زمن قدره $\frac{١}{٢}$ ساعة أوجد في نهاية الرحلة :

- | | |
|--------------------|----------------------------|
| ١ الإزاحة الحادثة. | ٢ المسافة الكلية المقطوعة. |
| ٣ السرعة المتوسطة. | ٤ متجه السرعة المتوسطة. |

الحل

بفرض \vec{v}_1 متجه وحده في اتجاه الحركة من أ إلى ب فإن :

١ الإزاحة الحادثة = $\vec{v}_1 ٤٥ + (\vec{v}_1 ٢٥) = \vec{v}_1 ٢٠$

٢ المسافة الكلية المقطوعة = $٢٥ + ٤٥ = ٧٠ \text{ كم}$

٣ السرعة المتوسطة = $\frac{\text{المسافة الكلية}}{\text{الزمن الكلي}} = \frac{٧٠}{\frac{١}{٢} + \frac{٣}{٤}} = ٥٦ \text{ كم/س}$

٤ متجه السرعة المتوسطة = $\frac{\text{الإزاحة الحادثة}}{\text{الزمن الكلي}} = \frac{\vec{v}_1 ٢٠}{\frac{١}{٢} + \frac{٣}{٤}} = \vec{v}_1 ١٦$

أي أن متجه السرعة المتوسطة له نفس متجه الوحدة \vec{v}_1 ومعياره = ١٦ كم/س

مثال ٤

قطع راكب دراجة على طريق مستقيم مسافة ٣٧,٥ كم بسرعة ٢٥ كم/س ثم قطع ١٨ كم بسرعة ١٢ كم/س. أوجد متجه السرعة المتوسطة خلال الرحلة كلها إذا كانت :

- ١ الإزاحتان في اتجاه واحد.
- ٢ الإزاحتان في اتجاهين متضادين.

الحل

$$\therefore \text{ زمن قطع المسافة الأولى} = \frac{37.5}{25} = 1.5 \text{ ساعة}$$

$$\text{، زمن قطع المسافة الثانية} = \frac{18}{12} = 1.5 \text{ ساعة}$$

$$\therefore \text{ الزمن الكلي} = 1.5 + 1.5 = 3 \text{ ساعة}$$

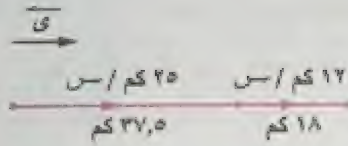
١ إذا كانت الإزاحتان في اتجاه واحد

$$\therefore \text{ متجه الإزاحة الكلية} = \vec{u}_{37.5} + \vec{u}_{18}$$

$$= \vec{u}_{55.5}$$

$$\therefore \text{ متجه السرعة المتوسطة} = \vec{v}_m = \frac{55.5}{3} = 18.5 \vec{u}$$

$$\therefore \text{ متجه السرعة المتوسطة له نفس اتجاه } \vec{u} \text{ ومعياره } = 18\frac{1}{2} \text{ كم/س}$$



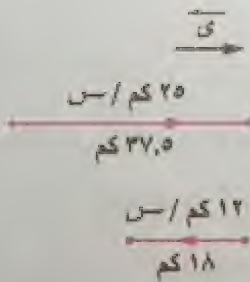
٢ إذا كانت الإزاحتان في اتجاهين متضادين

$$\therefore \text{ متجه الإزاحة الكلية} = \vec{u}_{37.5} + (-\vec{u}_{18})$$

$$= \vec{u}_{19.5}$$

$$\therefore \text{ متجه السرعة المتوسطة} = \vec{v}_m = \frac{19.5}{3} = 6.5 \vec{u}$$

$$\therefore \text{ متجه السرعة المتوسطة له نفس اتجاه } \vec{u} \text{ ومعياره } = 6.5 \text{ كم/س}$$



مثال 5

في نظام إحداثي متعامد إذا كان جسم عند الموضع $A(7, 3)$ بعد مرور 3 ثانية من بداية رصد حركته وأصبح عند الموضع $B(13, 11)$ بعد مرور 5 ثوانٍ من بداية الرصد أيضًا. أوجد متجه السرعة المتوسطة للجسم خلال هذه الفترة الزمنية ثم أوجد معيارها واتجاهها.

$$\vec{r}_1 = \vec{OA} = 7\hat{i} + 3\hat{j} \text{ م، } \vec{r}_2 = \vec{OB} = 13\hat{i} + 11\hat{j} \text{ م، } \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = 6\hat{i} + 8\hat{j} \text{ م}$$

$$\vec{v} = \text{متجه السرعة المتوسطة} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} = \frac{6\hat{i} + 8\hat{j}}{5 - 3} = 3\hat{i} + 4\hat{j} \text{ م/ث}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ وحدة طول/ثانية}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{4}{3} = 53.1^\circ \text{ مع المحور الموجب}$$

اتجاه متجه السرعة المتوسطة يصنع زاوية قياسها 53.1° مع الاتجاه الموجب للمحور السيني.

أي أن

مثال 6

الشكل المقابل يمثّل العلاقة بين الزمن والمسافة المقطوعة لحركة قطار في خط مستقيم من نقطة (أ) أوجد:

1. متجه السرعة المتوسطة.

2. السرعة المتوسطة.



يفرض أي متجه وحدة في اتجاه حركة القطار

ويتخذ النقطتين $A(4, 40)$ و $B(10, 100)$

$$\vec{v} = \frac{\text{الإزاحة الحادثة}}{\text{الزمن المنقضي}} = \frac{100 - 40}{10 - 4} = 10 \text{ م/ث}$$

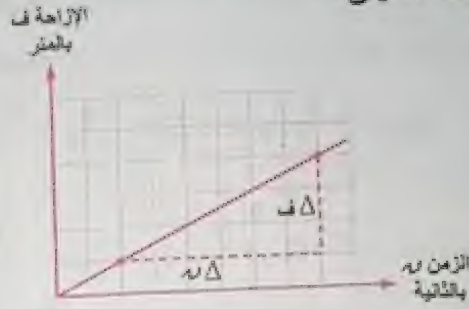
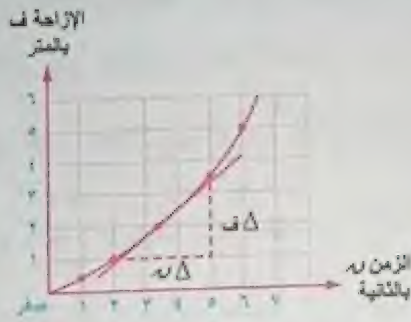
أي أن معيار متجه السرعة المتوسطة 10 كم/س في اتجاه الحركة.

$$، \text{ السرعة المتوسطة} = \frac{\text{المسافة المقطوعة}}{\text{الزمن المنقضى}} = \frac{300}{3} = 100 \text{ كم/س}$$

ونلاحظ أن معيار متجه السرعة المتوسطة = السرعة المتوسطة لأن الحركة منتظمة.

ملاحظة :

عند تمثيل العلاقة بين الإزاحة الحادثة والزمن المستغرق لحركة في خط مستقيم بيانياً نلاحظ ما يلي :



- * الشكل البياني يوضح أن الحركة متغيرة.
- * متجه السرعة اللحظية

= ميل المماس للمنحنى عند هذه اللحظة

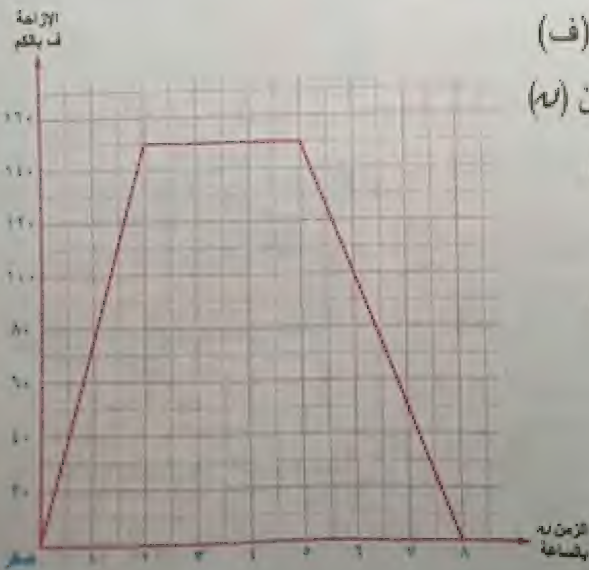
$$= \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

- * الشكل البياني يوضح أن الحركة منتظمة
- * متجه السرعة اللحظية

= متجه السرعة المتوسطة

$$= \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \text{ميل الخط البياني}$$

مثال ٧



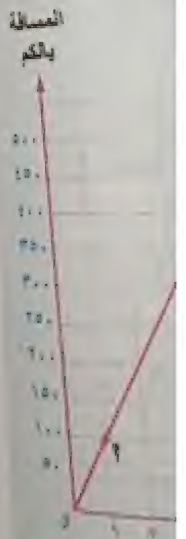
يمثل الشكل المقابل العلاقة بين مقدار الإزاحة (ف) الحادثة لسيارة تتحرك بين مدينتين ذهاباً وإياباً والزمن (ت)

١ أوجد مقدار متجه السرعة المتوسطة خلال أول ساعتين.

٢ أوجد مقدار متجه السرعة المتوسطة خلال آخر ٣ ساعات.

٣ ما دلالة القطعة المستقيمة الأفقية.

٤ أوجد كلاً من السرعة المتوسطة ومتجه السرعة المتوسطة في نهاية الرحلة.



B612

الحل

$$١ \therefore \text{ميل الخط البياني خلال أول ساعتين} = \frac{١٥٠ - \text{صفر}}{٢ - \text{صفر}} = ٧٥$$

٢. مقدار متجه السرعة المتوسطة خلال أول ساعتين = ٧٥ كم/س (ذهاباً)

$$٢ \therefore \text{ميل الخط البياني خلال آخر ٣ ساعات} = \frac{\text{صفر} - ١٥٠}{٥ - ٨} = ٥٠$$

٣. مقدار متجه السرعة المتوسطة خلال آخر ٣ ساعات = ٥٠ كم/س (عودة)

٤. تدل على توقف حركة السيارة لمدة ٣ ساعات.

$$٤ \bullet \text{السرعة المتوسطة} = \frac{\text{المسافة الكلية المقطوعة}}{\text{الزمن الكلي}} = \frac{١٥٠ + ١٥٠}{٨} = ٣٧,٥ \text{ كم/س}$$

$$\bullet \text{متجه السرعة المتوسطة} = \frac{\text{الإزاحة النهائية}}{\text{الزمن الكلي}}$$

وحيث أن السيارة عادت إلى المدينة الأولى مرة أخرى

٥. الإزاحة النهائية = صفر

٦. متجه السرعة المتوسطة = صفر

مثال ٨

قطع قطار المسافة بين القاهرة والإسكندرية على مرحلتين : المرحلة الأولى من القاهرة إلى الإسكندرية مسافة ١٠٥ كم بسرعة ١٠٥ كم/س. المرحلة الثانية من طنطا إلى الإسكندرية مسافة ١٢٠ كم بسرعة ٩٠ كم/س. فإذا كان القطار قد توقف في طنطا لمدة ١٠ دقائق. أوجد سرعته المتوسطة خلال الرحلة الكلية (اعتبر أن القطار يتحرك طوال الوقت على خط مستقيم).

الحل

$$\therefore \text{متجه الإزاحة الكلية} \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = ١٢٠ + ١٠٥ = ٢٢٥ \text{ كم}$$

$$\therefore \text{زمن قطع المسافة الأولى} = \frac{١٠٥}{١٠٥} = ١ \text{ ساعة}$$

$$\text{زمن قطع المسافة الثانية} = \frac{١٢٠}{٩٠} = \frac{٤}{٣} \text{ ساعة}$$

$$\text{زمن الاستراحة في طنطا} = ١٠ \text{ دقائق} = \frac{١}{٦} \text{ ساعة}$$

$$\therefore \text{الزمن الكلي} = ١ + \frac{٤}{٣} + \frac{١}{٦} = ٢,٥ \text{ ساعة}$$

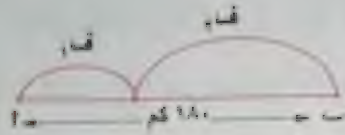
$$\therefore \text{متجه السرعة المتوسطة} \vec{G} = \frac{\vec{F}}{٢,٥} = \frac{٢٢٥}{٢,٥} = ٩٠ \text{ كم/س}$$

٧. متجه السرعة المتوسطة له نفس اتجاه \vec{F} ومعياره يساوي ٩٠ كم/س.

مدينتان أ، ب الطريق بينهما مستقيم. قامت سيارة من المدينة أ متجهة إلى ب بسرعة ٢٥ كم/س وفي نفس اللحظة قامت سيارة أخرى من المدينة ب متجهة إلى أ سرعتها ٦٥ كم/س. أوجد متى وأين تتقابل السيارتان علمًا بأن طول الطريق ١٨٠ كم.

الحل

نفرض أن السيارتين تتقابلان بعد زمن قدره t ساعة



$$180 = 25t + 65t$$

$$180 = 90t$$

$$t = 2 \text{ ساعة}$$

$$t = 2 \text{ ساعة}$$

∴ السيارتان تتقابلان بعد ساعتين من بدء الحركة.

$$x = 25 \times 2 = 50 \text{ كم}$$

∴ السيارتان تتقابلان على بُعد ٥٠ كم من أ

السرعة النسبية

تدُلنا بعض الأمثلة الحياتية أن الحركة مفهوم نسبي يتغير وصفها من مشاهد إلى آخر بل هي قد تتغير بالنسبة للمشاهد الواحد حسب حالته.



فمثلاً:

• قد يتخيل راكب قطار أن قطاره يتحرك إلى الخلف عند النظر من النافذة إلى قطار آخر قد بدأ التحرك في نفس اتجاهه ولكنه يكتشف أن قطاره ما زال ساكناً عند النظر إلى الجهة الأخرى من المحطة (الثابتة).



• عندما ينظر راكب سيارة إلى سيارة أخرى أمامه تسير بسرعة أقل مقداراً من سرعته يبدو له وكأن هذه السيارة تتحرك نحوه (للخلف).

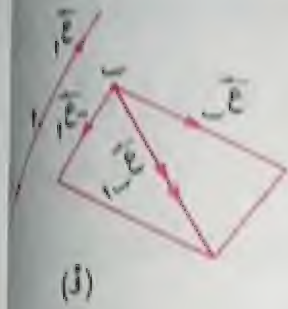
• عندما ينظر راكب سيارة إلى سيارة أخرى تتحرك في نفس اتجاهه فإنها تبدو له وكأنها تتحرك بسرعة بطيئة بينما عندما ينظر إلى سيارة أخرى تتحرك في عكس اتجاهه فإنها تبدو له وكأنها تتحرك بسرعة كبيرة.

مفهوم السرعة النسبية

السرعة النسبية لجسيم (ب) بالنسبة لجسيم آخر (أ) هي السرعة التي يبدو أن الجسيم (ب) يتحرك بها لو اعتبرنا الجسيم (أ) في حالة سكون ويرمز لها بالرمز $(\vec{v}_{B/A})$.

متجه السرعة النسبية

نعتبر جسمين أ، ب وأن \vec{v}_A ، \vec{v}_B هما متجهتا سرعتيهما بالنسبة لمشاهد (و) على سطح الأرض فإذا فرضنا أن شخصاً موجوداً على الجسم أ متحركاً معه رصد حركة الجسم ب فإن $\vec{v}_{B/A}$ هو متجه سرعة ب بالنسبة إلى أ



ولمعرفة العلاقة بين \vec{v}_A ، \vec{v}_B ، $\vec{v}_{B/A}$ نعطي كلاً من الجسمين أ، ب سرعة إضافية $-\vec{v}_A$ ليصبح أ ساكناً ويصبح متجه سرعة الجسم ب بالنسبة للجسم أ $\vec{v}_B - \vec{v}_A = \vec{v}_{B/A}$

$$\therefore \vec{v}_{B/A} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$$

متجه سرعة ب بالنسبة إلى أ = متجه سرعة ب - متجه سرعة أ

أي ان

تساوى محصلة متجهي السرعتين \vec{v}_B ، $-\vec{v}_A$

أي

والعلاقة (١) تعطى السرعة النسبية متى عرفت سرعتا الجسمين بالنسبة للمشاهد الساكن على سطح الأرض (و) كما يمكن كتابة هذه العلاقة على الصورة :

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A}$$

والعلاقة (٢) يمكن بواسطتها حساب $\vec{v}_{B/A}$ إذا عرفنا \vec{v}_A ، \vec{v}_B

ملاحظات:

$$1 \quad \vec{v}_1 = -\vec{v}_2$$

2 إذا كانت سرعة السيارة (1) هي \vec{v}_1 ، سرعة الدراجة (2) هي \vec{v}_2 وكانت سرعة الدراجة (2) بالنسبة للسيارة (1) هي \vec{v}_{12}

أولاً : إذا كان : \vec{v}_1 ، \vec{v}_2 في اتجاهين متضادين فإن : \vec{v}_{12} لها نفس اتجاه \vec{v}_1 ثانياً : إذا كان : \vec{v}_1 ، \vec{v}_2 في نفس الاتجاه فإن :

* \vec{v}_{12} لها نفس اتجاه \vec{v}_1 إذا كان : $\vec{v}_1 < \vec{v}_2$

* \vec{v}_{12} لها عكس اتجاه \vec{v}_1 إذا كان : $\vec{v}_1 > \vec{v}_2$

مثال 10

تتحرك سيارة على طريق مستقيم بسرعة 70 كم/س فإذا تحركت على الطريق نفسه دراجة بخارية بسرعة 40 كم/س فأوجد سرعتها بالنسبة للسيارة في كل من الحالتين الآتيتين :

1 الدراجة تسير في عكس اتجاه حركة السيارة.

2 الدراجة تسير في نفس اتجاه حركة السيارة.

الحل

نفرض أن \vec{v}_1 هو متجه وحدة في اتجاه حركة السيارة.

\vec{v}_1

70 كم/س

40 كم/س

السيارة 1

الدراجة 2

1 الدراجة (2) تسير في عكس اتجاه حركة السيارة (1) :

$$\therefore \vec{v}_{12} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = 70 - 40 = 30 \text{ كم/س}$$

$$\therefore \vec{v}_{12} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = 70 - 40 = 30 \text{ كم/س}$$

$$\therefore \vec{v}_{12} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = 70 - 40 = 30 \text{ كم/س}$$

أي أن الدراجة تبدو لراكب السيارة وكأنها متحركة نحوه أي في عكس اتجاه حركة السيارة بسرعة مقدارها 120 كم/س.

٢ الدراجة (ب) تسير في نفس اتجاه حركة السيارة (أ) :

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \vec{v} \quad , \quad \vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \vec{v}$$

$$\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{v} - \vec{v} = \vec{0}$$

$$\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{v} - \vec{v} = \vec{0}$$

أى أن : الدراجة تبدو لراكب السيارة وكأنها متحركة نحو السيارة بسرعة مقدارها ٣٠ كم/س وكأنها تتقهقر بهذه السرعة.

مثال ١١

تتحرك باخرة في خط مستقيم نحو ميناء ما ولما وصلت على بعد ١٠٠ كم منه مرت فوقها طائرة تطير في الاتجاه المضاد بسرعة ٣٠٠ كم/س ورصدت حركة الباخرة فببت لها متحركة بسرعة ٢٥٠ كم/س احسب كم من الوقت يمضى من لحظة الرصد حتى وصول الباخرة إلى الميناء.

الحل

نفرض أن \vec{v}_1 متجه وحدة في اتجاه حركة الطائرة (أ)

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \vec{v} \quad , \quad \vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \vec{v}$$

$$\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{v} - \vec{v} = \vec{0}$$

$$\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{v} - \vec{v} = \vec{0}$$

$$\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{v} - \vec{v} = \vec{0}$$

∴ سرعة الباخرة = ٥٠ كم/س نحو الميناء

$$\frac{f}{c} = \frac{v}{c}$$

∴ زمن وصول الباخرة إلى الميناء = $\frac{100}{50} = 2$ ساعة.

B612

قامت سيارة الشرطة (٢) التي تتحرك في خط مستقيم بقياس السرعة النسبية لسيارة (ب) بالنسبة لها قادمة في الاتجاه المضاد فوجدتها ١٢٠ كم/س. ولما خفضت السيارة (٢) سرعتها إلى النصف وأعادت القياس وجدت أن السرعة النسبية للسيارة (ب) أصبحت ١٠٠ كم/س. فما هي السرعة الفعلية لكل من السيارتين ؟

الحل



نفرض أن \vec{u} متجه وحدة في اتجاه حركة السيارة (١)

$$\vec{v}_1 = 120 \vec{u}$$

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 - \vec{v} = 120 \vec{u}$$

عندما خفضت السيارة (٢) سرعتها إلى النصف

$$\vec{v}_2 = 100 \vec{u}$$

$$\vec{v}_2 = \frac{1}{2} \vec{v}_1 - \vec{v} = 100 \vec{u}$$

من (١) و (٢) : $\vec{v}_1 = 40 \vec{u}$ ، $\vec{v}_2 = 80 \vec{u}$

$\therefore \vec{v}_1 = 40 \text{ كم/س}$ ، $\vec{v}_2 = 80 \text{ كم/س}$ في الاتجاه المضاد.

ملاحظة :

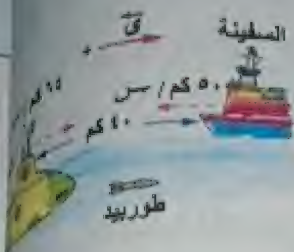


إذا كان (٢) طراداً سرعته \vec{u}

أطلق منه طوربيد (ب) بسرعة \vec{v}

\therefore سرعة الطوربيد $\vec{v} =$ سرعة الطراد (\vec{u}) + السرعة التي أطلق بها الطوربيد.

يتحرك طراد وسفينة على مسار مستقيم واحد بحيث كان كل منهما يتحرك نحو الآخر وقد راقب الطراد حركة السفينة وعندما كانت على بُعد ٤٠ كم منه كانت سرعة السفينة ٥٠ كم/س وسرعة الطراد ٦٤ كم/س وعندئذ أطلق الطراد عليها طوربيداً بسرعة ١٢٦ كم/س احسب الزمن الذي يمضي من لحظة إطلاق الطوربيد حتى لحظة إصابة السفينة.



الحل
نفرض أن \vec{v} متجه وحدة في اتجاه حركة الطراد (٢)
∴ سرعة الطوربيد \vec{u}

= سرعة الطراد + السرعة التي أطلق بها الطوربيد

$$= 64 + 126 = 190 \text{ كم/س}$$

∴ متجه سرعة الطوربيد بالنسبة للسفينة $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} - \vec{v}$

$$= 190 - (50) = 140 \text{ كم/س}$$

أي $\vec{u} = 140 \text{ كم/س}$ في اتجاه حركة الطراد.

∴ الزمن الذي يستغرقه الطوربيد حتى إصابة السفينة = $\frac{f}{u} = \frac{40}{140} = \frac{1}{3.5} \text{ ساعة}$

$$= \frac{1}{3.5} \times 60 \text{ دقيقة} = 17.14 \text{ دقائق}$$

مثال ١٤

مر قطار طوله ١٥٠ مترًا ويتحرك بسرعة ٧٢ كم/س إلى جوار قطار آخر طوله ١٠٠ مترًا على شريط مواز. أوجد الزمن اللازم لكي يمر القطار الأول بالكامل من القطار الثاني إذا كان القطار الثاني:

١ ساكنًا.

٢ يتحرك بسرعة ٤٥ كم/س في نفس اتجاه حركة القطار الأول.

٣ يتحرك بسرعة ٤٥ كم/س في عكس اتجاه حركة القطار الأول.

الحل

بفرض أن متجه سرعة القطار الأول \vec{u} وأن متجه سرعة القطار الثاني \vec{v}
وأن \vec{w} متجه وحدة في اتجاه حركة القطار الأول.

$$١ \quad \vec{u} = 72 \text{ كم/س}, \quad \vec{v} = 0$$

$$\therefore \vec{u} - \vec{v} = \vec{u} - 0 = \vec{u} = 72 \text{ كم/س}$$

ولكي يمر القطار الأول بالكامل من القطار الثاني يجب أن يقطع مسافة $150 + 100 = 250 \text{ مترًا}$ وبسرعة مقدارها ٧٢ كم/س = $\frac{5}{18} \times 72$

$$\therefore \text{الزمن الذي يستغرقه} = \frac{250}{\frac{5}{18} \times 72} = 12.5 \text{ ثانية}$$

$$\text{٢} \quad \overline{ع_1} = \overline{ع_2} = ٧٢ \text{ م/ث} ، \overline{ع_3} = ٤٥ \text{ م/ث} \quad \therefore \overline{ع_1} = \overline{ع_2} - \overline{ع_3} = ٧٢ - ٤٥ = ٢٧ \text{ م/ث}$$

∴ لكي يمر القطار الأول بالكامل من القطار الثاني يجب أن يقطع مسافة ٢٥٠ مترًا

$$\text{بسرعة } ٢٧ \times \frac{٥}{١٨} = ٧,٥ \text{ متر/ث}$$

$$\therefore \text{الزمن الذي يستغرقه} = \frac{٢٥٠}{٧,٥} = ٣٣ \frac{١}{٣} \text{ ثانية}$$

$$\text{٣} \quad \overline{ع_1} = \overline{ع_2} = ٧٢ \text{ م/ث} ، \overline{ع_3} = ٤٥ \text{ م/ث}$$

$$\therefore \overline{ع_1} = \overline{ع_2} - \overline{ع_3} = ٧٢ - ٤٥ = ٢٧ \text{ م/ث}$$

∴ لكي يمر القطار الأول بالكامل من القطار الثاني يجب أن يقطع مسافة ٢٥٠ مترًا بسرعة

$$\frac{٦٥}{٣} \text{ متر/ث} = \frac{٥}{١٨} \times ١١٧$$

$$\therefore \text{الزمن الذي يستغرقه} = \frac{٦٥}{٣} \div ٢٥٠ = \frac{٦٥}{٣} \times ٢٥٠ = ٧,٧ \text{ ثانية}$$

مثال ١٥

يتحرك قطار بسرعة ٨٤ كم/س لحق بقطار آخر طوله ١٢٠ مترًا يتحرك بسرعة ٦٠ كم/س على شريط مواز يمر عليه بالكامل في ٤٥ ثانية، أوجد طول القطار الأول ثم أوجد الزمن الذي يستغرقه في المرور على كوبرى طوله ٥٢٠ مترًا علمًا بأن القطار الثاني يسير في نفس اتجاه القطار الأول.

الحل

نفرض أن متجه سرعة القطار الأول = $\overline{ع_1}$ وأن طوله = ف مترًا

وأن متجه سرعة القطار الثاني = $\overline{ع_2}$ وأن $\overline{ع_3}$ متجه وحدة في اتجاه حركة القطارين.

$$\therefore \overline{ع_1} = ٨٤ \text{ م/ث} ، \overline{ع_2} = ٦٠ \text{ م/ث} \quad \therefore \overline{ع_1} = \overline{ع_2} - \overline{ع_3} = ٨٤ - ٦٠ = ٢٤ \text{ م/ث}$$

∴ القطار الأول يقطع مسافة (ف + ١٢٠) مترًا بسرعة مقدارها ٢٤ كم/س

$$= \frac{٥}{١٨} \times ٢٤ = \frac{٢٠}{٣} \text{ متر/ث في زمن قدره } ٤٥ \text{ ثانية}$$

$$\therefore \text{ف} + ١٢٠ = ٤٥ \times \frac{٢٠}{٣} = ٣٠٠ \quad \therefore \text{ف (طول القطار الأول)} = ٣٠٠ - ١٢٠ = ١٨٠ \text{ مترًا}$$

ولكي يمر القطار الأول على الكوبرى يجب أن يقطع مسافة (٥٢٠ + ١٨٠) = ٧٠٠ متر

$$\text{بسرعة } ٨٤ \text{ كم/س أي بسرعة } \frac{٥}{١٨} \times ٨٤ = \frac{٧٠}{٣} \text{ متر/ث}$$

$$\therefore \text{الزمن الذي يستغرقه لعبور الكوبرى} = \frac{٧٠}{٣} \div ٧٠٠ = \frac{٢}{٧٠} \times ٧٠٠ = ٢٠ \text{ ثانية}$$

على الحركة المستقيمة

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١) $٢٠ \text{ م/ث} = \dots\dots\dots \text{ كم/س}$

(أ) $\frac{٥}{٩}$ (ب) ٧٢ (ج) ٠,١٨ (د) ٢٠

٢) $٤٥ \text{ كم/دقيقة} = \dots\dots\dots \text{ م/ث}$

(أ) ٧٥٠ (ب) ١٢,٥ (ج) ١٦٢ (د) ٧٥

٣) إذا تحرك جسيم في خط مستقيم ٩ متر شرقاً ثم عاد ٣ متر غرباً فإن :

الإزاحة الحادثة =

(أ) ١٢ متر في اتجاه الشرق. (ب) ١٢ متر في اتجاه الغرب.

(ج) ٦ متر في اتجاه الشرق. (د) ٦ متر في اتجاه الغرب.

٤) قطعت سيارة مسافة قدرها ١٨٠ كم خلال فترة زمنية مدتها ١٢٠ دقيقة فإن :

المتوسطة =

(أ) ٩٠ (ب) ١,٥ (ج) ١٨٠ (د) ٢٥

٥) إذا كان الضوء يصل من الشمس إلى الأرض في ٨,٣ دقيقة وكان بُعد الك

الأرض $١,٤٩٤ \times ١٠^{١١}$ متر فإن سرعة الضوء كم/ث.

(أ) $١,٨ \times ١٠^{١١}$ (ب) ٣٠٠

(ج) ٣٠٠٠٠٠ (د) ٣×١٠^{١١}

٦) متجه الموضع لجسيم يتحرك يعطى بالعلاقة $\vec{r} = (٩ - ٢t) \vec{s} + t \vec{v}$ فإن متجه الإزاحة $\vec{f} = \dots\dots\dots$

(أ) $\vec{r} + \vec{s}$

(ب) $٩ \vec{s} + \vec{v}$

(ج) $(٩ - ٢t) \vec{s} + \vec{v}$

(د) $\vec{r} - ٢ \vec{s}$

٧) إذا كان : $\vec{v} = ١٢٠ \text{ م/ث}$ ، $\vec{a} = -٨٠ \text{ م/ث}^٢$ فإن : $\vec{v} = \dots\dots\dots$

(أ) ٤٠ م/ث (ب) -٤٠ م/ث

(ج) ٢٠٠ م/ث

(د) -٢٠٠ م/ث

٨ يتحرك راكب دراجة ١ على طريق مستقيم بسرعة ١٥ كم/س ويتحرك في نفس الاتجاه راكب آخر ب سرعة ١٢ كم/س فإن القياس الجبرى لمتجه سرعة ب بالنسبة إلى ١ تساوى كم/س

- (١) ٣ (ب) ٣- (ج) ٢٧ (د) ٢٧-

٩ تتحرك سيارتان ١ ، ب على طريق مستقيم واحد وفى اتجاهين متضادين بالسرعتين ١٢٥ كم/س ، ٧٥ كم/س على الترتيب

فإن سرعة السيارة ب بالنسبة إلى السيارة ١ = كم/س

- (١) ٥٠ (ب) ٥٠- (ج) ٢٠٠ (د) ٧٥

١٠ قذفت كرة لأعلى فوصلت إلى ارتفاع ٣ متر ثم عادت إلى نقطة القذف مرة أخرى فإن مقدار الإزاحة الحادثة يساوى

- (١) ٣ متر (ب) ٦ متر (ج) صفر (د) ٩ متر

١١ عندما يتحرك جسيم فإن مقدار الإزاحة المسافة المقطوعة.

- (١) < (ب) ≤ (ج) > (د) ≥

١٢ إذا كان متجه موضع جسيم يتحرك فى خط مستقيم من نقطة (و) يعطى كدالة فى الزمن t بالعلاقة $r = (2t + 3) \hat{i}$ فإن معيار متجه الإزاحة \vec{r} بعد

٢ ثانية يساوى وحدة طول.

- (١) ٤ (ب) ٦ (ج) ٨ (د) ١١

١٣ إذا كانت : $\vec{r} = 4\hat{i} - 2\hat{j}$ و $\vec{v} = 3\hat{i} - \hat{j}$ وكان $\vec{r} = \vec{v}$ عند $t = 1$ ثانية

فإن : $\vec{r} = \vec{v}$ عندما $t = 1$

- (١) $5\hat{i} - 6\hat{j}$ (ب) $4\hat{i} - 3\hat{j}$ (ج) $2\hat{i} - 3\hat{j}$ (د) $7\hat{i} - 2\hat{j}$

١٤ إذا تحركت سيارة بسرعة منتظمة مقدارها ٧٥ كم/س لمدة ٢٠ دقيقة

فإن المسافة المقطوعة بالكم تساوى

- (١) ١٥ (ب) ٢٠ (ج) ٢٥ (د) ٣٠

١٥ الزمن بالساعة الذى تستغرقه سيارة تتحرك بسرعة منتظمة ٢٠ م/ث فى قطع

مسافة ١٨٠ كم يساوى

- (١) $1\frac{1}{2}$ (ب) ٢ (ج) $2\frac{1}{2}$ (د) ٣

١٦ تحركت دراجة ناحية الشرق بسرعة ٤ م/ث لمدة ٦٠ ثانية ثم توقفت لمدة ١٠ ثوان ثم تحركت ناحية الغرب بسرعة ٥ م/ث لمدة ٣٠ ثانية أخرى فإن السرعة المتوسطة خلال الرحلة الكلية = م/ث

١٧ (أ) ٠,٩ (ب) ٠,٧ (ج) ١ (د) ٣,٩
 إذا كان : $\vec{v}_1 = 15 \text{ م/ث}$ ، $\vec{v}_2 = 35 \text{ م/ث}$ فإن : $\vec{v} = \dots\dots\dots$
 (أ) ٥٠ م/ث (ب) ٢٠ م/ث (ج) ٢٠ م/ث (د) ٥٠ م/ث

١٨ ١ ، ٢ جسمان يتحركان في اتجاهين متضادين ، معيار سرعة ١ ضعف معيار سرعة ٢ فإن السرعة النسبية للجسم ١ بالنسبة للجسم ٢ =
 (أ) ١,٥ م/ث (ب) ٢ م/ث (ج) ٢,٥ م/ث (د) ٣ م/ث

٢ تحرك جسم مسافة ٤٨ متر شرقاً ثم غير اتجاهه وسار ٢٠ متر شمالاً. أوجد المسافة التي تحركها الجسم وكذلك الإزاحة الحادثة. ٦٨٠ متر ، ٥٢ متر في الاتجاه ٣٢,٣٧° شمال الشرق.

٣ تحرك راكب دراجة ٦ كم غرباً ثم تحرك بعد ذلك ٨ كم بزاوية قياسها ٦٠° جنوب الغرب احسب المسافة والإزاحة التي قطعها راكب الدراجة.

١٤٠ كم ، ٢٠٧,٧ كم في الاتجاه ٣٤,٤٢° جنوب الغرب

٤ في الشكل المقابل :
 إذا كانت كل من \vec{v}_1 ، \vec{v}_2 عمودية على \vec{v} وإذا تحرك جسم من النقطة ١ إلى النقطة ٢ ثم \vec{v} وتوقف عند \vec{v} فأوجد المسافة التي قطعها الجسم وكذلك الإزاحة الحادثة.

٣٥٠ سم ، ٢٥٠ سم في الاتجاه ١٥,٩°

٥ يتحرك جسم بحيث أن متجه موضعه \vec{r} يعطى كدالة في الزمن بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين \vec{i} ، \vec{j} بالعلاقة $\vec{r} = (3 - t)\vec{i} + (1 + t)\vec{j}$ ص أوجد متجه الإزاحة الحادثة حتى اللحظة $t = 3$

٦ يتحرك جسم في خط مستقيم من نقطة ثابتة (و) بحيث أن متجه موضعه \vec{r} يتحدد بالعلاقة $\vec{r} = (t^2 + 3t + 5)\vec{i}$ حيث \vec{i} متجه وحدة مواز للخط المستقيم. أوجد متجه الإزاحة، كذلك متجه السرعة المتوسطة منذ بدء الحركة حتى $t = 3$ ثانية.

الدرس 1

٧ قطع راكب دراجة ٤٠ كيلو مترًا على طريق مستقيم بسرعة ٢٠ كم/س ثم عاد فقطع ١٥ كيلو مترًا في الاتجاه المعاكس بسرعة ١٥ كم/س. أوجد متجه سرعته المتوسطة خلال الرحلة الكلية.

٨ $\frac{1}{4}$ كم/س في اتجاه حركة قطع المسافة الأولى.

٨ سار رجل على طريق مستقيم فقطع ٨٠٠ متر بسرعة ٩ كم/س ، وقطع نفس المسافة في نفس الاتجاه بسرعة ٤.٥ كم/س.

أوجد السرعة المتوسطة للرجل خلال الرحلة كلها.

٩ يتحرك جسم في خط مستقيم مسافة ١٠٠ م بسرعة ٥ م/ث ثم تحرك بسرعة ٨ م/ث في نفس الاتجاه لمدة ١٠ ثوان أوجد السرعة المتوسطة خلال الرحلة كلها.

١٠ قطع راكب دراجة مسافة ٦٠ كم في اتجاه الغرب ثم مسافة ٩٠ كم في اتجاه الشرق فإذا كانت سرعته ١٢ كم/س.

فأوجد متجه سرعته المتوسطة خلال الرحلة كلها.

١١ قطعت سيارة المسافة بين القاهرة والإسماعيلية وقدرها ١٢٠ كم على مرحلتين : الأولى

ومسافتها ٤٠ كم بسرعة ٨٠ كم/س والثانية ومسافتها ٨٠ كم بسرعة ٦٠ كم/س فإذا اعتبرنا أن السيارة تتحرك طوال الوقت في خط مستقيم وأن السيارة توقفت بعد قطع المرحلة الأولى لمدة ١٠ دقائق. فأوجد متجه سرعتها المتوسطة خلال الرحلة كلها.

١٢ $\frac{1}{6}$ كم/س في اتجاه الحركة من القاهرة إلى الإسماعيلية.

١٢ قطع راكب دراجة على طريق مستقيم مسافة ٢٧ كم بسرعة ١٨ كم/س ثم قطع مسافة ٣٦ كم بسرعة ١٢ كم/س. أوجد السرعة المتوسطة خلال الرحلة كلها إذا كانت :

١ الإزاحتان في اتجاه واحد.

٢ الإزاحتان في اتجاهين متضادين.

١٣ إذا كان الجسم عند لحظتين زمنيتين ٢ ، ٦ ثانية من بدء حركته عند الموضعين ٢ (٣ ، ٥) ،

ب (٧ ، ٢٥) على الترتيب أوجد متجه السرعة المتوسطة للجسيم خلال هذه الفترة الزمنية ثم أوجد معيار واتجاه هذه السرعة المتوسطة.

س : ٥ ص : $\frac{26}{2}$ وحدة طول/ثانية ، ٦٤ ، ١٩ ، ٧٨ مع س.

٢٥ قطاران يسيران على خطين متوازيين والمسافة بينهما ٣,٥ كم فإذا كانت سرعة أحدهما ٥٠ كم/س وسرعة الآخر ٢٠ كم/س. فبعد كم من الزمن يتجاوران ؟ إذا كانا :

١ يسيران في اتجاهين متضادين وجهاً لوجه.

٢ يسيران في اتجاه واحد (الأسرع في الخلف).

بعد ٣ دقائق ، بعد ٧ دقائق.

٢٦ تتحرك سيارتان ١ ، ٢ على طريق مستقيم بالسرعتين ٦٠ كم/س ، ٩٠ كم/س وفي اتجاه ٢

١ أوجد سرعة ٢ بالنسبة إلى ١

٢ أوجد سرعة ١ بالنسبة إلى ٢

٣ إذا كانت المسافة بينهما ١٠ كم فبعد كم دقيقة يمكن أن يلتقيا ؟

٢٠٠ كم/س في اتجاه ٢ ، ٢٠ كم/س في اتجاه ١ ، ٢٠ دقيقة.

٢٧ يسير طارق في طريق مستقيم بسرعة ٦٠ م/د شاهد أيمن الذي يسير في نفس الطريق بسرعة ٤٠ م/د فإذا كان البعد بينهما ١٠٠ متر. فبعد كم دقيقة يلتقيان ؟ إذا كانا :

١ يسيران في اتجاه واحد (الأسرع في الخلف).

٢ يسيران في اتجاهين متضادين.

١٠ ، ٥٠ دقيقة.

٢٨ تتحرك سيارتان على نفس الطريق المستقيم في اتجاهين متضادين فإذا كانت المسافة بينهما ٤ كم وسرعة إحدى السيارتين ٧٠ كم/س وتقابلتا بعد دقيقتين. فما هي السرعة الفعلية للسيارة الأخرى ؟

٥٠ كم/س.

٢٩ تتحرك طائرتان بنفس السرعة في مسار مستقيم ، بحيث تتابع إحداهما الأخرى والمسافة بينهما ٥٠٠ متر وفي لحظة ما أطلقت الطائرة الخلفية صاروخاً على الطائرة الأمامية فأصابها بعد مرور ثائيتين من إطلاقه. فما هي سرعة دفع الصاروخ ؟

٢٥٠ م/ث

٣٠ طائرة مقاتلة تلاحق قاذفة قنابل ويسيران على نفس الخط المستقيم ولهما نفس السرعة والاتجاه. فإذا كانت المسافة بينهما ٢٠ كم عندما أطلقت المقاتلة صاروخاً والذي كانت سرعته الكلية ١٢٠٠ كم/س فأصاب القاذفة بعد ٤ دقائق فما هي سرعة كل من الطائرتين ؟

١٠٠ م/ث

الدرس 1

٣١ قامت سيارة (أ) تتحرك على طريق مستقيم بقياس السرعة النسبية لسيارة (ب) قادمة في الاتجاه المضاد فوجدتها ١٢٠ كم/س ، لما ضاعفت السيارة (أ) سرعتها وأعدت القياس وجدت أن سرعة (ب) أصبحت ١٨٠ كم/س. أوجد السرعة الفعلية لكل من السيارتين.

٦٠ كم/س ، ٦٠ كم/س

٣٢ سيارة (أ) متحركة على طريق مستقيم رصدت سرعة سيارة أخرى (ب) قادمة في الاتجاه المضاد فوجدتها ١٢٠ كم/س ، ولما خُفضت السيارة (أ) سرعتها إلى النصف وأعدت رصد السيارة (ب) فوجدت أن سرعتها ١١٠ كم/س. فما هي السرعة الفعلية لكل من السيارتين.

١٠٠ كم/س ، ٩٠ كم/س

٣٣ قامت سيارة (أ) متحركة على طريق مستقيم بقياس السرعة النسبية لسيارة (ب) قادمة في الاتجاه المضاد فوجدتها ١٢٠ كم/ساعة ولما خُفضت السيارة (أ) سرعتها حتى أصبحت $\frac{2}{3}$ سرعتها الأولى وأعدت القياس وجدت أن السرعة النسبية للسيارة (ب) أصبحت ١٠٠ كم/ساعة. فما هي السرعة الفعلية لكل من السيارتين ؟

٨٠ كم/س ، ٤٠ كم/س

٣٤ أثناء حركة سيارة الشرطة (أ) على طريق مستقيم راقبت السيارة (ب) المتحركة في الاتجاه المضاد فبدت وكأنها تتحرك بسرعة مقدارها ١٤٠ كم/ساعة وفي نفس اللحظة راقبت سيارة الشرطة (أ) عربة النقل (ج) المتحركة في نفس الاتجاه فبدت وكأنها تتحرك بسرعة مقدارها ٦٠ كم/ساعة. احسب سرعة عربة النقل (ج) بالنسبة إلى السيارة (ب).

٢٠٠ كم/س في اتجاه سيارة الشرطة.

٣٥ قامت سيارة شرطة متحركة بسرعة منتظمة على طريق أفقي بقياس السرعة النسبية لشاحنة تتحرك أمامها وفي نفس الاتجاه فوجدتها ٦٠ كم/س ولما زادت سرعة سيارة الشرطة إلى الضعف وأعدت القياس فبدت الشاحنة وكأنها ساكنة. أوجد السرعة الفعلية لكل من سيارة الشرطة والشاحنة.

٦٠ كم/س ، ١٢٠ كم/س

٣٦ عندما كانت سيارة الشرطة (أ) تتحرك على طريق مستقيم بسرعة ٤٢ كم/س شاهدت سيارة أخرى (ب) ودراجة (ج) تسيران على نفس الطريق فبدأت لها السيارة (ب) كما لو كانت قادمة في الاتجاه المضاد بسرعة ١٣٢ كم/س وبدأت لها الدراجة (ج) كما لو كانت تتقهقر بسرعة ١٢ كم/س. أوجد السرعة الفعلية لكل من السيارة (ب) والدراجة (ج).
٩٠٠ كم/س عكس اتجاه حركة سيارة الشرطة ، ٢٠ كم/س في نفس اتجاه حركة سيارة الشرطة.

٣٧ يتحرك طراد وسفينة على مسار مستقيم واحد بحيث كان كل منهما يتحرك نحو الآخر وقد راقب الطراد حركة السفينة وعندما كانت على بُعد ٢٠ كم منه كانت سرعة السفينة ٤٠ كم/ساعة وسرعة الطراد ٥٢ كم/ساعة وعندئذ أطلق الطراد عليها طوربيدًا بسرعة ١٠٨ كم/ساعة. احسب الزمن الذي يمضي من لحظة إطلاق الطوربيد حتى لحظة إصابة السفينة. ٦ دقائق.

٣٨ مر قطار ١ طوله ٨٠ مترًا يتحرك بسرعة ١٢٠ كم/س بقطار آخر ب طوله ١٢٠ مترًا أوجد الزمن اللازم لكي يمر القطار ١ بالكامل من القطار ٢ إذا كان القطار ٢ :

- ١ ساكنًا.
- ٢ متحركًا بسرعة ٧٠ كم/س في نفس اتجاه حركة القطار ١
- ٣ متحركًا بسرعة ٨٠ كم/س في عكس اتجاه حركة القطار ١

٦ ثوانٍ ، ١٤.٤ ثانية ، ٣.٦ ثانية.

٣٩ يتحرك قطار ١ بسرعة ١٠٠ كم/س ، لحق بقطار آخر ب طوله ١٩٠ مترًا يتحرك بسرعة ٦٠ كم/س على شريط مواز فمر عليه بالكامل في ٢٧ ثانية. أوجد طول القطار ١ والزمن الذي يستغرقه في عبور كوبرى طوله ٩٠ مترًا.

١١٠٠ أمتار ، ٧.٢ ثانية.

مسائل تقبّس مستويات عليا من التفكير

٤٠ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ في الشكل المقابل :



جسيم تحرك من نقطة أ إلى نقطة ب على دائرة طول نصف قطرها نق فإن الإزاحة الحادثة =

- (أ) نق θ
- (ب) ٢ نق θ
- (ج) نق $\frac{\theta}{2}$
- (د) ٢ نق $\frac{\theta}{2}$

٢ إذا تحرك جسم مسافة (ف) بسرعة (ع) ثم تحرك في نفس الاتجاه مسافة (ف) بسرعة (ع) فإن السرعة المتوسطة تكون

$$(i) \frac{1}{2}(ع + ع) \quad (ب) \frac{1}{2}ف \quad (ج) \frac{ع + ع}{2} \quad (د) \frac{2}{ع + ع}$$

٣ وُجد أنه لو تحرك جسم بسرعة ١٤ كم/س بدلاً من ١٠ كم/س لقطع مسافة أكثر بمقدار ٢٠ كم فإن المسافة التي يقطعها الجسم بالسرعة ١٤ كم/س هي كم

$$(i) 50 \quad (ب) 56 \quad (ج) 70 \quad (د) 80$$



٤ قطاران لهما نفس الطول يسيران في نفس الاتجاه في خطين متوازيين الأول

بسرعة ٤٦ كم/س والثاني بسرعة

٣٦ كم/س فإذا لحق القطار السريع

القطار البطيء وتخطاه بالكامل في ٣٦ ثانية

فإن طول كل قطار = متر.

$$(i) 25 \quad (ب) 50 \quad (ج) 75 \quad (د) 100$$



٥ متسابق يلف مضمار ثابت عبارة عن خطين

متوازيين طول كل منهما ٩٦ متر وتتصل نهايتي

كل طرف بنصف دائرة طول نصف قطرها ٤٩ متر

إذا أتم المتسابق دورة كاملة في ١٠٠ ثانية فإن مقدار

متجه السرعة المتوسطة = م/ث $(\frac{22}{7} = \pi)$

$$(i) 2.5 \quad (ب) 5 \quad (ج) 10 \quad (د) \text{ صفر}$$

٦ قطار متحرك بسرعة منتظمة مقدارها ١٥ م/ث يعبر رجل ساكن في ٢٧ ثانية فإن المدة

الزمنية التي يعبر بها نفس القطار بالكامل رصيف طوله ١٥٠ متر تساوي ثانية.

$$(i) 27 \quad (ب) 30 \quad (ج) 37 \quad (د) 42$$

٧) تحركت سيارة مسافة ٢٠ كم بسرعة منتظمة ٣٠ كم/س ثم تحركت في نفس الاتجاه مسافة ٩٠ كم بسرعة (ع) فإذا كانت سرعتها المتوسطة خلال الرحلة كلها هي ٤٠ كم/س فإن : ع = كم/س

(١) ٣٠ (ب) ٦٠ (ج) ٤٥ (د) ١٢٠

٨) قطاران يسيران في اتجاهين متضادين يعبران رجل ساكن على الرصيف في زمنين ٢٧ ثانية ، ١٧ ثانية على الترتيب ويعبران بعضهما في ٢٣ ثانية فإن النسبة بين سرعتيهما

(١) ٣ : ١ (ب) ١٢ : ١ (ج) ٢ : ٣ (د) ٤ : ٣

٩) إذا كان : \vec{E}_1 ، \vec{E}_2 متجهي سرعة جسمين يتحركان في الاتجاهين \vec{H} ، \vec{H}' على الترتيب فإن اتجاه \vec{E}_1 يكون

(١) في اتجاه \vec{H} دائماً.

(ب) في اتجاه \vec{H} فقط عندما $\|\vec{E}_1\| < \|\vec{E}_2\|$

(ج) في اتجاه \vec{H}' دائماً.

(د) في اتجاه \vec{H}' فقط عندما $\|\vec{E}_1\| > \|\vec{E}_2\|$

٤١ طائرة هليكوبتر تطير في خط مستقيم بسرعة ١٢٦ كم/س فوق قطار يتحرك في نفس الاتجاه فوصلت الطائرة من مؤخرة القطار إلى مقدمته خلال ١٥ ثانية ولما خفض قائد الطائرة سرعتها إلى النصف أصبحت الطائرة فوق مؤخرة القطار خلال ٢٠ ثانية. أوجد طول القطار بالمتري.

١٥٠٠ متر

٤٢ يتحرك رجل على كوبرى A ، وعندما قطع $\frac{2}{8}$ طول الكوبرى من جهة A سمع صوت صفير قطار يتحرك خلفه بسرعة منتظمة مقدارها ٦٠ كم/س نحو نقطة A فإذا تحرك الرجل نحو القطار فإن القطار سيصدمه عند نقطة A مباشرة. أوجد السرعة المنتظمة التي يتحرك بها الرجل قبل أن يصدمه القطار مباشرة عند نقطة B

١٥٠ كم/س



2

الدرس

الحركة منتظمة التغير في خط مستقيم

إذا تحرك جسيم بحيث يتغير متجه سرعته من لحظة لأخرى في المقدار أو الاتجاه أو في كليهما فإنه يقال أن الجسيم يتحرك حركة متغيرة أو أنه يتحرك بعجلة (تسارع).

تعريف متجه العجلة

هو المعدل الزمني للتغير في متجه السرعة \vec{v} ، هو التغير في متجه السرعة في وحدة الزمن.

فإذا كان: \vec{v}_1 ، \vec{v}_2 متجهي سرعة جسيم عند لحظتين متتاليتين t_1 ، t_2 على الترتيب

$$\vec{a} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \text{متجه العجلة المتوسطة}$$

وفي حالة أن الفترة الزمنية $(t_2 - t_1)$ تكون متناهية في الصغر فإن متجه العجلة في هذه الحالة يعرف بمتجه العجلة اللحظية (التسارع اللحظي) ويرمز له بالرمز (\vec{a})

أنواع الحركة في خط مستقيم

الحركة المنتظمة هي حركة بسرعة ثابتة مقدارًا واتجاهًا بمرور الزمن.

الحركة المتغيرة هي حركة تتغير فيها سرعة الجسيم بمرور الزمن.

الحركة المنتظمة التغير هي حركة تتغير فيها سرعة الجسيم بمعدل زمني ثابت.

أي أن متجه عجلة الجسيم يكون ثابتًا مقدارًا واتجاهًا بمرور الزمن.

* من المعروف أن اتجاه السرعة دائمًا في نفس اتجاه الحركة لجسيم أما اتجاه العجلة فإنه قد يكون:

١ في نفس اتجاه الحركة وهنا فإن سرعة الجسيم تزايد بمرور الزمن وتكون حادًا لها نفس إشارة \vec{v} في القياس الجبري لمتجهي العجلة والسرعة.

٢ في عكس اتجاه الحركة وهنا فإن سرعة الجسيم تتناقص بمرور الزمن وتكون حادًا لها عكس إشارة \vec{v} في القياس الجبري لمتجهي العجلة والسرعة.

وحدات قياس مقدار العجلة

∴ وحدة قياس مقدار متجه العجلة = $\frac{\text{وحدة قياس مقدار متجه السرعة}}{\text{وحدة قياس الزمن}}$

∴ يمكن قياس مقدار العجلة بالوحدات الآتية :

سم/ث / ث (وتكتب سم/ث^٢) ، متر/ث / ث (وتكتب متر/ث^٢)
 أ، كم/س / س (وتكتب كم/س^٢) ، أ، كم/س / ث ، أ، متر/ث / دقيقة ... إلخ.

مثال ١

حول عجلة مقدارها ١ كم/س / ث إلى :

١ متر/ث^٢ ٢ سم/ث^٢ ٣ كم/س^٢ ٤ متر/ث / دقيقة.

الحل

$$١ \text{ كم/س / ث} = \frac{١ \text{ كم}}{س \times ث} = \frac{١٠٠٠ \text{ متر}}{ث \times ٦٠ \times ٦٠} = \frac{٥}{١٨} \text{ متر/ث}^٢$$

$$١ \text{ كم/س / ث} = \frac{١ \text{ كم}}{س \times ث} = \frac{١٠٠ \times ١٠٠٠ \text{ سم}}{ث \times ٦٠ \times ٦٠} = \frac{٢٥٠}{٩} \text{ سم/ث}^٢$$

$$١ \text{ كم/س / ث} = \frac{١ \text{ كم}}{س \times ث} = \frac{١ \text{ كم}}{س \times \frac{١}{٦٠ \times ٦٠}} = ٣٦٠٠ \text{ كم/س}^٢$$

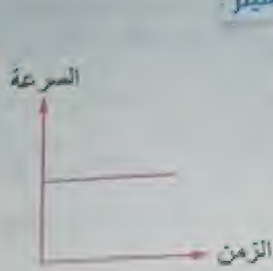
$$١ \text{ كم/س / ث} = \frac{١ \text{ كم}}{س \times ث} = \frac{١٠٠٠ \text{ متر}}{ث \times ٦٠ \text{ دقيقة}} = \frac{٥٠}{٣} \text{ متر/ث / دقيقة}$$

ماذا يعني قولنا بان :

١ جسيماً يتحرك في خط مستقيم بعجلة منتظمة ٦ سم/ث^٢ في اتجاه حركته ؟
 - ذلك يعني أن مقدار سرعة هذا الجسيم يزداد أثناء حركته زيادة منتظمة بمعدل ٦ سم/ث كل ثانية.

٢ جسيماً يتحرك في خط مستقيم بعجلة منتظمة ٨ كم/س / دقيقة في عكس اتجاه حركته ؟
 - ذلك يعني أن مقدار سرعة هذا الجسيم يتناقص بانتظام أثناء حركته بمعدل ٨ كم/س كل دقيقة.

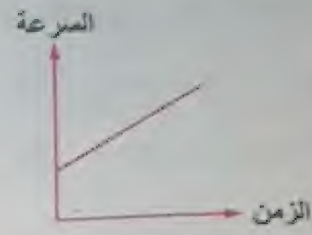
• التمثيل البياني لمنحنى السرعة - الزمن لحركة جسيم في خط مستقيم :



• الحركة منتظمة
بعجلة = صفر

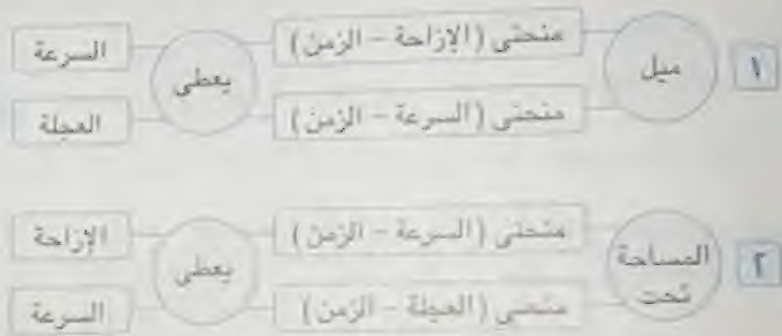


• الحركة منتظمة التغير
بعجلة سالبة



• الحركة منتظمة التغير
بعجلة موجبة

• معلومة إضافية



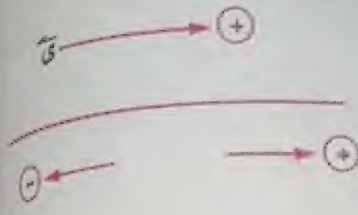
معادلات الحركة منتظمة التغير في خط مستقيم

وسوف ندرس الآن معادلات الحركة المنتظمة ذات العجلة المنتظمة (الحركة منتظمة التغير). وقد سبق دراسة هذه المعادلات في مادة الفيزياء بالصف الأول الثانوي وهناك رموز سوف نستخدمها في هذه القوانين نلخصها فيما يلي :

الرمز	ما يدل عليه
\vec{v}	متجه سرعة الجسيم عند بدء قياس الزمن.
\vec{v}	متجه سرعة الجسيم في نهاية الفترة الزمنية (v).
\vec{s}	متجه الإزاحة التي طرأت على الجسيم خلال الفترة الزمنية v.
\vec{a}	متجه العجلة.

العلاقة بين السرعة والزمن في حالة الحركة المستقيمة بعجلة منتظمة

المعادلة الأولى



نفرض أن جسيماً يتحرك في خط مستقيم حركة منتظمة

التغير وأن متجه العجلة الثابتة له \vec{a}

ومتجه سرعته عند بدء قياس الزمن \vec{v}

ومتجه سرعته بعد فترة زمنية مقدارها (t) \vec{v}

$$\vec{v} = \frac{\vec{v} - \vec{v}}{t} \therefore \vec{a} = \frac{\vec{v} - \vec{v}}{t}$$

$$\therefore \vec{a} = \vec{v} + \vec{v}$$

وبأخذ القياسات الجبرية للمتجهات \vec{a} ، \vec{v} ، \vec{v} يكون $a = v + v$

المعادلة الثانية

العلاقة بين الإزاحة والزمن في حالة الحركة المستقيمة بعجلة منتظمة

إذا تحرك جسيم بعجلة منتظمة فإن متجه سرعته المتوسطة \vec{v} خلال فترة زمنية معينة

يساوي نصف مجموع متجهي سرعته عند بداية ونهاية هذه الفترة الزمنية

$$\boxed{\vec{v} = \frac{1}{2} (\vec{v} + \vec{v})}$$

وباستخدام القياسات الجبرية يكون $\vec{v} = \frac{1}{2} (v + v)$ ولكن من القانون الأول :

$$a = v + v$$

$$\therefore \vec{v} = \frac{1}{2} (v + v)$$

$$\therefore \vec{v} = \frac{1}{2} (2v)$$

$$\therefore \vec{v} = v$$

∴ الإزاحة = متجه السرعة المتوسطة × الزمن

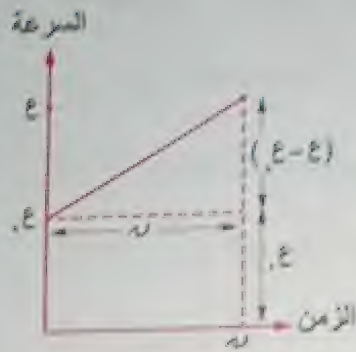
$$\therefore f = v \times t$$

$$\therefore f = v \times \left(\frac{1}{2} v + v \right)$$

$$\therefore \boxed{f = v \times \left(\frac{1}{2} v + v \right)}$$

طريقة أخرى لاستنتاج المعادلة السابقة

المساحة أسفل منحنى (السرعة - الزمن) تساوي الإزاحة الحادثة للجسيم وإذا كانت حركة جسيم منتظمة التغير (بعجلة منتظمة) مبتدئاً الحركة بسرعة ابتدائية u وبعد مرور زمن قدره t أصبحت سرعته v ممثلة بالشكل المقابل



فإن الإزاحة الحادثة $F =$ مساحة الجزء تحت الخط البياني

$$= \text{مساحة المستطيل} + \text{مساحة المثلث}$$

$$= u \cdot t + \frac{1}{2} t (v - u)$$

وبالتعويض من المعادلة الأولى

$$F = u \cdot t + \frac{1}{2} t (v - u)$$

$$\therefore F = u \cdot t + \frac{1}{2} t (v - u)$$

المعادلة الثالثة العلاقة بين السرعة والإزاحة في حالة الحركة المستقيمة بعجلة منتظمة

$$(1) \quad v = u + at$$

$$(2) \quad F = u \cdot t + \frac{1}{2} at^2$$

بحذف t من المعادلتين (1) ، (2) كما يلي :

بتربيع (1) :

$$\therefore v^2 = (u + at)^2 = u^2 + 2uat + a^2t^2$$

$$\therefore v^2 = u^2 + 2a \left(u \cdot t + \frac{1}{2} at^2 \right)$$

وبالتعويض من (2) :

$$\therefore v^2 = u^2 + 2aF$$

ملاحظات :

١ المعادلات السابقة تربط بين أربعة مجاهيل يمكن إيجاد أحدها بمعلومية الثلاثة الأخرى

٢ إشارة كل من v ، a ، ω ، α ف تتحدد متى حددنا اتجاه متجه الوحدة \hat{i}

٣ عند بدء الحركة لجسيم يكون : $v = 0$ (صفر)

٤ إذا بدأ الجسيم حركته من السكون فإن : $a = 0$ (صفر)

٥ إذا وصل الجسيم إلى أقصى بعد (أو إذا سكن الجسيم) فإن : $v = 0$ (صفر)

٦ إذا تحرك الجسيم بسرعة منتظمة فإن : $a = 0$ (صفر)

٧ إذا تحرك الجسيم بأقصى سرعة له فإن : $a = 0$ (صفر)

٨ إذا عاد الجسيم إلى موضعه الأصلي فإن : $\omega = 0$ (صفر)

٩ في حالة معرفة v ، a ، ω فإنه ليس من الضروري إيجاد العجلة a

لحساب الإزاحة f حيث يمكن استخدام المعادلة $f = v \times \frac{v + a}{2}$ أى $f = v \times t$ (المستخدمة في إثبات المعادلة الثانية)

١٠ اتجاه السرعة دائماً في اتجاه الحركة أما اتجاه العجلة فقد يكون في اتجاه الحركة (تسارع) أو في عكس اتجاه الحركة (تقصير).

١١ أى حركة تقصيرية لا يمكن أن تستمر إلا لفترة محدودة من الزمن ثم تنقلب بعدها إلى حركة متسارعة في الاتجاه المضاد.

مثال ٢

تتحرك سيارة في خط مستقيم مبتدئة من السكون بعجلة منتظمة مقدارها $\frac{1}{4} \text{ م/ث}^2$ في اتجاه حركة السيارة أوجد :

١ مقدار سرعة السيارة بعد دقيقة واحدة بالكم/س

٢ الزمن بالثواني الذي تستغرقه السيارة حتى تصبح سرعتها ٩٠ كم/س

الحل

نفرض أن الاتجاه الموجب هو اتجاه حركة السيارة

$$\therefore \text{ع.} = \text{صفر} , \text{ح} = \frac{1}{4} \text{ م/ث}^2 , \text{و} = 60 \text{ ثانية}$$

$$\text{ع} = \text{ع} + \text{ح} \times \text{و} \quad \therefore \text{ع} = \text{صفر} + 60 \times \frac{1}{4} = 15 \text{ م/ث}$$

$$\therefore \text{ع} = \frac{18}{0} \times 20 = 10.8 \text{ كم/س}$$

$$\text{ع} = \text{ع} + \text{ح} \times \text{و} \quad \therefore \text{ع} = \frac{0}{18} \times 90 = 5 \text{ م/ث}$$

$$\therefore \text{و} = 25 \text{ ثانية} \quad \therefore \text{و} = 50 \text{ ثانية}$$

مثال ٢

بدأ جسيم حركته في خط مستقيم بعجلة منتظمة ٥ سم/ث^٢ وبسرعة ابتدائية ٢٠ سم/ث في عكس اتجاه العجلة أوجد سرعته وإزاحته بعد :

$$\text{١} \quad 3 \text{ ثوانٍ} \quad \text{٢} \quad 4 \text{ ثوانٍ} \quad \text{٣} \quad 6 \text{ ثوانٍ} \quad \text{٤} \quad 9 \text{ ثوانٍ}$$

الحل

نعتبر أن اتجاه السرعة الابتدائية هو الاتجاه الموجب

$$\therefore \text{ع.} = 20 \text{ سم/ث} , \text{ح} = -5 \text{ سم/ث}^2$$

$$\text{ع} = \text{ع} + \text{ح} \times \text{و} = 20 + (-5) \times 3 = 5$$

\therefore السرعة بعد ٣ ثوانٍ = ٥ سم / ث في نفس اتجاه ع.

$$\text{و} = \text{ع} + \text{ح} \times \text{و} = 20 + (-5) \times 3 = 5 \text{ سم}$$

$$\text{ع} = \text{ع} + \text{ح} \times \text{و} = 20 + (-5) \times 4 = 0 \text{ صفر}$$

\therefore الجسيم يسكن لحظيًا بعد ٤ ثوانٍ.

$$\text{و} = \text{ع} + \text{ح} \times \text{و} = 20 + (-5) \times 4 = 0 \text{ سم}$$

$$٢٣ \quad ع = ع + ح \cdot ٦ + ٢٠ = ١٠ - = ٦ \times (٥ -) + ٢٠$$

∴ السرعة بعد ٦ ثوانٍ = ١٠ سم/ث في عكس اتجاه ع.

$$ع = ع + ح \cdot ٦ + ٢٠ = ١٠ - = ٦ \times (٥ -) + ٢٠$$

$$٢٤ \quad ع = ع + ح \cdot ٩ + ٢٠ = ٢٥ - = ٩ \times (٥ -) + ٢٠$$

∴ السرعة بعد ٩ ثوانٍ = ٢٥ سم/ث في عكس اتجاه ع.

$$ع = ع + ح \cdot ٩ + ٢٠ = ٢٥ - = ٩ \times (٥ -) + ٢٠$$

أى أن : الجسم تخطى المكان الذى بدأ منه حركته بمسافة ٢٢,٥ متر في عكس اتجاه ع.

مثال ٤

يتحرك جسم في خط مستقيم بعجلة منتظمة ٢ سم/ث^٢ في اتجاه حركته وبعد أن قطع مسافة ٢,٢٥ متر أصبحت سرعته ٥٠ سم/ث فما هي سرعته الابتدائية ؟

الحل

نفرض أن الاتجاه الموجب هو اتجاه حركة الجسم ، $ح = ٢$ سم/ث^٢

$$ع = ٢٢٥ \text{ سم} ، ع = ٥٠ \text{ سم/ث}$$

$$ع = ع + ح \cdot ٢$$

$$٢٢٥ \times ٢ \times ٢ + ع = (٥٠)$$

$$١٦٠٠ = ٩٠٠ - ٢٥٠٠ = ع$$

$$ع = ٤٠ \pm \text{ سم/ث}$$

∴ ع في الاتجاه الموجب

∴ ع (السرعة الابتدائية للجسم) = ٤٠ سم/ث

السرعة المتوسطة المقطوعة خلال الثانية النونية للحركة منتظمة التغير

١ لإيجاد المسافة التي قطعها الجسم خلال الثانية النونية نوجد المسافة التي يكون قد قطعها خلال (ن) ثانية الأولى والمسافة التي يكون قد قطعها خلال (ن - ١) ثانية الأولى والفرق بينهما هو المسافة المقطوعة خلال الثانية النونية.

أي أن المسافة المقطوعة خلال الثانية النونية = $f_n - f_{n-1}$

فمثلاً : المسافة المقطوعة خلال الثانية الخامسة = $f_5 - f_4$

، المسافة المقطوعة خلال الثانية الثامنة والتاسعة = $f_8 - f_7$

٢ السرعة المتوسطة لجسيم خلال فترة زمنية ما = سرعته اللحظية في منتصف هذه الفترة

فمثلاً : السرعة المتوسطة خلال الثانية الخامسة = $ع + ٤.٥$ ح

، السرعة المتوسطة خلال الثانية الثامنة والتاسعة = $ع + ٩$ ح

٣ المسافة = السرعة المتوسطة \times الزمن

فمثلاً : المسافة المقطوعة خلال الثانية الخامسة = $(ع + ٤.٥) \times ١$

، المسافة المقطوعة خلال الثانية الثامنة والتاسعة = $(ع + ٩) \times ٢$

فمثلاً :

١ إذا قطع جسيم مسافة ٥ أمتار خلال الثانية الرابعة (١ ثانية) فإن سرعته المتوسطة = $\frac{٥}{١} = ٥$ متر/ث وتكون مساوية لسرعة الجسيم بعد $٣ \frac{١}{٢}$ ثانية من بدء الحركة

$\therefore ع + ٣ \frac{١}{٢} = ٥$ ح

٢ إذا قطع جسيم مسافة ٨ سم خلال الثانية الخامسة والسادسة (٢ ثانية)

فإن سرعته المتوسطة = $\frac{٨}{٢} = ٤$ سم / ث وتكون مساوية لسرعة الجسيم بعد ٥ ثوانٍ

$\therefore ع + ٥ = ٤$ ح

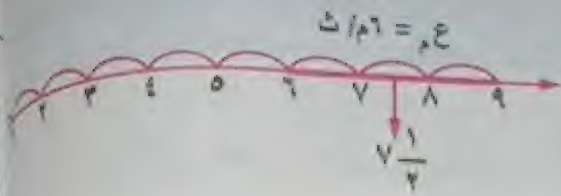
٣ إذا قطع جسيم مسافة ١٨ مترًا

خلال الثواني الثلاث السابعة

والثامنة والتاسعة (٣ ثوانٍ)

∴ سرعته المتوسطة = $\frac{18}{3} = 6$ م/ث وتكون مساوية لسرعة الجسيم بعد $7\frac{1}{4}$ ث

$$\therefore 6 = ع + 7\frac{1}{4} ح$$



مثال ٥

بدأ جسيم حركته من السكون في خط مستقيم بعجلة منتظمة فقطع مسافة ٣٨ سم في العاشرة من حركته.

أوجد مقدار عجلته والمسافة التي قطعها في الثانية الخامسة من حركته.

الحل

السرعة المتوسطة خلال الثانية العاشرة

$$= \frac{38}{1} = 38 \text{ سم/ث}$$

وهي تساوي سرعة الجسيم في منتصف الثانية العاشرة أي بعد ٩.٥ ثانية من بدء الحركة.

$$ع = ع + ح \therefore$$

$$\therefore 38 = 9.5 + 0 ح$$

$$\therefore ح = \frac{38}{9.5} = 4 \text{ سم/ث}^2$$

ولإيجاد المسافة المقطوعة في الثانية الخامسة نقول :

السرعة المتوسطة خلال الثانية الخامسة = السرعة في منتصف الثانية الخامسة

= السرعة بعد ٤.٥ ثانية من بدء الحركة

$$ع = ع + ح \therefore$$

$$\therefore ع = 4.5 \times 4 + 0 = 18 \text{ سم/ث}$$

$$ف = ع \times ح \therefore$$

$$\therefore ف = 1 \times 18 = 18 \text{ سم}$$

∴ المسافة المقطوعة في الثانية الخامسة = ١٨ سم

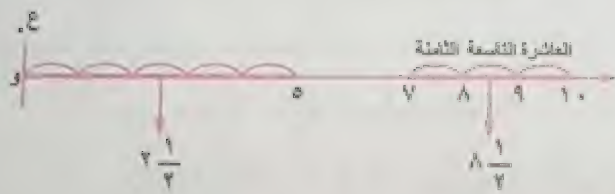
حل آخر:

$$\begin{aligned} \therefore \text{ف}_1 - \text{ف}_2 &= 38 \\ \therefore \left(\text{صفر} + 4 \times \frac{1}{4} \right) - \left(100 \times 4 \times \frac{1}{4} + \text{صفر} \right) &= 38 \\ \therefore 4 \text{ سم/ث} &= 4 \\ \therefore \text{المسافة المقطوعة في الثانية الخامسة} &= \text{ف}_2 - \text{ف}_1 \\ &= \left(16 \times 4 \times \frac{1}{4} + \text{صفر} \right) - \left(20 \times 4 \times \frac{1}{4} + \text{صفر} \right) \\ &= 32 - 20 = 12 \text{ سم} \end{aligned}$$

مثال ٦

يتحرك جسيم بعجلة منتظمة في اتجاه ثابت هو نفس اتجاه سرعته الابتدائية فإذا قطع الجسيم مسافة ١٠٠ سم في الثواني الخمس الأولى من حركته ، وقطع مسافة ٩٠ سم في الثواني الثامنة والتاسعة والعاشر من حركته. أوجد عجلة الحركة وكذا سرعته الابتدائية.

الحل:



نعتبر اتجاه السرعة الابتدائية هو الاتجاه الموجب x في الثواني الخمس الأولى = $\frac{100}{5} = 20$ سم/ث وهي سرعته بعد ٢,٥ ثانية من بدء الحركة

$$\therefore v + a \cdot t = v$$

(١)

$$\therefore 20 + a \cdot 2,5 = 20$$

$$a \cdot 2,5 = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ سم/ث}^2$$

وهي سرعته بعد ٨,٥ ثانية من بدء الحركة

$$\therefore v + a \cdot t = v$$

(٢)

$$\therefore 20 + a \cdot 8,5 = 20$$

$$\therefore a = 0 \text{ سم/ث}^2$$

من (١) ، (٢) بالطرح : $\therefore 6 = 10$

$$\therefore \frac{0}{4} \times \frac{0}{4} + a = 20 \therefore (١) \text{ وبالتعويض في (١) : } \therefore a = 20 \text{ سم/ث}^2$$

مثال ٧

يتحرك جسيم في اتجاه ثابت بسرعة ابتدائية ٢٠ سم/ث وعجلة منتظمة ٨ سم/ث^٢ في اتجاه سرعه
أوجد : ١ المسافة التي يكون الجسيم قد قطعها خلال الثانية الخامسة فقط.
٢ المسافة التي يكون الجسيم قد قطعها خلال الثانية السابعة والثامنة معًا.

الحل

١ نعتبر اتجاه السرعة الابتدائية هو الاتجاه الموجب

$$ع = ٢٠ \text{ سم/ث} ، ح = ٨ \text{ سم/ث}^٢$$

$$٠ = ف = ع \cdot ح + \frac{١}{٢} ح^٢$$

$$٠ = ف (٥) = ٢٠ \times ٥ + \frac{١}{٢} (٨)^٢ (٥) = ٢٠٠ \text{ سم}$$

$$٠ = ف (٤) = ٢٠ \times ٤ + \frac{١}{٢} (٨)^٢ (٤) = ١٤٤ \text{ سم}$$

$$٠ = \text{المسافة التي قطعها الجسيم خلال الثانية الخامسة فقط} = ١٤٤ - ٢٠٠ = ٥٦ \text{ سم}$$

حل آخر:

$$ع = ٢٠ \text{ سم/ث}$$



السرعة المتوسطة خلال الثانية الخامسة

= السرعة في منتصف الثانية الخامسة

= السرعة بعد ٤,٥ ثانية من بدء الحركة

$$٠ = ع = ع + ح \cdot ح$$

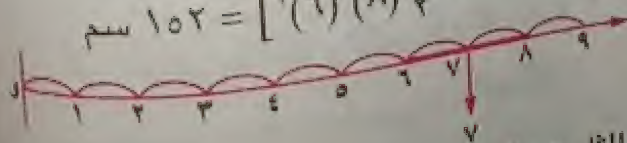
$$٠ = ع = ٢٠ + ٨ \times ٤,٥ = ٥٦ \text{ سم/ث}$$

$$٠ = \text{المسافة المقطوعة خلال الثانية الخامسة} = ع \times \text{الزمن} = ٥٦ \times ١ = ٥٦ \text{ سم}$$

٢ المسافة التي قطعها الجسيم خلال الثانية السابعة والثامنة معًا

$$٠ = ف - ف = ٢٠ \times ٨ + \frac{١}{٢} (٨)^٢ (٨) - [٢٠ \times ٦ + \frac{١}{٢} (٨)^٢ (٦)] = ١٥٢ \text{ سم}$$

حل آخر:



السرعة المتوسطة خلال الثانية السابعة والثامنة معًا

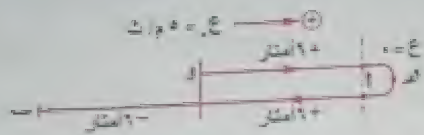
$$٠ = ع = ع + ح \cdot ح$$

$$٠ = ع = ٢٠ + ٨ \times ٧ = ٧٦ \text{ سم/ث}$$

$$٠ = \text{المسافة المقطوعة خلال الثانية السابعة والثامنة معًا} = ع \times \text{الزمن} = ٧٦ \times ٢ = ١٥٢ \text{ سم}$$

كرة صغيرة تم دفعها في عكس اتجاه الرياح بسرعة ٥ متر/ث فتحركت في خط مستقيم حركة تقصيرية بعجلة ٢ متر/ث^٢ أوجد الزمن الذي يمضي من لحظة الدفع حتى تصبح الكرة على بُعد ٦ أمتار من مكان القذف.

الحل



نعتبر الاتجاه الموجب هو اتجاه سرعة الدفع ع.

$$\therefore \text{ع} = 5 \text{ متر/ث}$$

ح = ٢ - متر/ث^٢ وعندما تكون الكرة على بُعد ٦ أمتار من مكان الدفع (و) فإن :

ف = ٦ + أ ، ف = ٦ - حيث ف الموجبة تعني أن الكرة تقع عند أ في جهة الإزاحة الموجبة أي في الجانب الذي دفعت ناحيته ، ف السالبة تعني أن الكرة تقع عند ب في جهة الإزاحة السالبة أي في الجانب الآخر بالنسبة لمكان الدفع (و).

١ إذا كانت ف = ٦ -

$$\therefore \text{ف} = \text{ع} \cdot \text{ح} + \frac{1}{2} \text{ ح}^2 \quad \therefore 6 = 5 \cdot \text{ح} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \text{ح}^2 \quad \therefore 6 = 5\text{ح} + \text{ح}^2 \quad \therefore \text{ح}^2 + 5\text{ح} - 6 = 0$$

$$\therefore (2 - \text{ح})(7 + \text{ح}) = 0 \quad \therefore \text{ح} = 2 \text{ ثانية أو } \text{ح} = -7 \text{ ثوان}$$

∴ الكرة تكون على بُعد ٦ أمتار من مكان الدفع وفي الجهة التي دفعت ناحيتها مرتين بعد مرور ثانيتين وهي متحركة في الاتجاه الموجب وبعد مرور ٢ ثوان وهي متحركة في الاتجاه السالب بعد أن تكون قد وصلت إلى حالة السكون اللحظي عند ٥ وغيّرت اتجاه حركتها.

٢ إذا كانت ف = ٦ -

$$\therefore \text{ف} = \text{ع} \cdot \text{ح} + \frac{1}{2} \text{ ح}^2 \quad \therefore 6 = 5 \cdot \text{ح} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \text{ح}^2 \quad \therefore 6 = 5\text{ح} + \text{ح}^2 \quad \therefore \text{ح}^2 + 5\text{ح} - 6 = 0$$

$$\therefore (6 - \text{ح})(1 + \text{ح}) = 0 \quad \therefore \text{ح} = 6 \text{ ثوان أو } \text{ح} = -1$$

∴ الكرة تكون على بُعد ٦ أمتار من مكان الدفع وفي الجهة الأخرى وهي جهة الإزاحة السالبة بالنسبة لنقطة الدفع بعد مرور ٦ ثوان من لحظة الدفع.

مثال ٩

أطلقت رصاصة أفقيًا على كتلة خشبية بسرعة ١٠٠ متر/ث فغاصت فيها مسافة ٥٠ سم حتى سكتت. أوجد العجلة التي تحركت بها الرصاصة إذا علم أنها عجلة منتظمة ، وإذا تم إطلاقها على كتلة خشبية أخرى معاملة للأولى سمكها ١٨ سم. فما هي السرعة التي تخرج بها الرصاصة من الكتلة الخشبية ؟

الحل

نفرض أن الاتجاه الموجب هو اتجاه حركة الرصاصة.

• بالنسبة للكتلة الخشبية الأولى :



$$ع = 100 \text{ م/ث} ، ع = 0$$

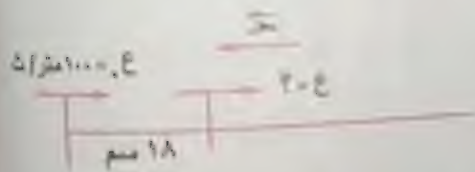
$$ف = \frac{1}{4} \text{ متر}$$

$$ع^2 = ع^2 + 2 \cdot ح \cdot ف$$

$$0 = (100)^2 + 2 \cdot ح \cdot \frac{1}{4}$$

∴ ح (العجلة المنتظمة للرصاصة) = - ١٠٠٠٠ م/ث^٢ أى فى عكس اتجاه إطلاق الرصاصة

• بالنسبة للكتلة الخشبية الثانية



$$ع = 100 \text{ م/ث} ، ح = - 10000 \text{ م/ث}^2$$

$$ف = 18 \text{ سم} = 0.18 \text{ متر}$$

$$ع^2 = ع^2 + 2 \cdot ح \cdot ف$$

$$ع^2 = 10000 + 2 \cdot (-10000) \cdot 0.18$$

$$ع^2 = 3600 - 10000 = -6400$$

$$ع = \pm 80 \text{ م/ث}$$

∴ السرعة التي تخرج بها الرصاصة فى نفس اتجاه إطلاق الرصاصة أى فى الاتجاه الموجب ∴ ع سرعة خروج الرصاصة من الكتلة الخشبية الثانية = ٨٠ متر/ث

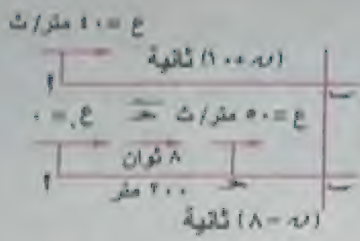
مثال ١٠

تتحرك سيارة بسرعة منتظمة ١٤٤ كم/س ، مرت بسيارة شرطة ساكنة فبدأت سيارة الشرطة فى متابعتها بعد ١٠ ثوان من مرورها ، متحركة بعجلة منتظمة لمسافة ٢٠٠ متر حتى بلغت سرعتها ١٨٠ كم/س ، ثم سارت بهذه السرعة حتى لحقت بالسيارة الأولى. أوجد الزمن الذى استغرقته سيارة الشرطة من بدء حركتها حتى لحاقها بالسيارة.

المسألة

نعتبر الاتجاه الموجب هو اتجاه حركة السيارة وأن
السيارة مرت بسيارة الشرطة عند t وأن سيارة
الشرطة لحقتها عند t

وأن الزمن الذي استغرقته سيارة الشرطة من بدء حركتها
حتى لحقت بالسيارة $t = 8$ ثانية



• السيارة قطعت المسافة t بسرعة منتظمة $10 \times 8 = 80$ متر/ث

في زمن قدره $(10 + t)$ ثانية

∴ $t = 80$ متر $(10 + t)$ ∴

• سيارة الشرطة تحركت مسافتين t حـ ، حـ :

أولاً : تحركت المسافة t حـ وقدرها 200 متر بعجلة منتظمة حيث $t = 0$

$$t = 0 \Rightarrow 180 = \frac{0}{18} \times 180 = 0 \text{ متر/ث}$$

$$t = 8 \Rightarrow 180 = \frac{0}{18} \times 180 + 200 + \frac{1}{2} \times 50 \times 8^2 \Rightarrow 180 = 200 + 1600 \Rightarrow 180 = 1800$$

$$t = 8 \Rightarrow 180 = 200 + 1600 \Rightarrow 180 = 1800$$

∴ $t = 8$ (زمن قطع المسافة t حـ) = 8 ثوان

ثانياً : المسافة حـ تحركتها سيارة الشرطة بسرعة منتظمة 50 متر/ث في زمن

قدرة $(8 - t)$ ثانية.

$$\therefore \text{المسافة حـ} = 50(8 - t) \text{ ، } \therefore 180 = 200 + 50(8 - t) \Rightarrow 180 = 200 + 400 - 50t \Rightarrow 180 = 600 - 50t \Rightarrow 50t = 420 \Rightarrow t = 8.4$$

$$\therefore 180 = 200 + 50(8 - t) \Rightarrow 180 = 200 + 400 - 50t \Rightarrow 180 = 600 - 50t \Rightarrow 50t = 420 \Rightarrow t = 8.4$$

$$\text{من (1) ، (2) : } \therefore 180 = 200 + 50(8 - t) \Rightarrow 180 = 200 + 400 - 50t \Rightarrow 180 = 600 - 50t \Rightarrow 50t = 420 \Rightarrow t = 8.4$$

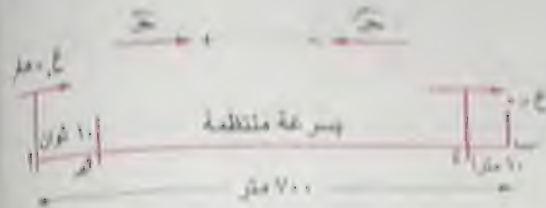
$$\therefore 180 = 200 + 50(8 - t) \Rightarrow 180 = 200 + 400 - 50t \Rightarrow 180 = 600 - 50t \Rightarrow 50t = 420 \Rightarrow t = 8.4$$

∴ $t = 8.4$ ثانية وهو الزمن الذي استغرقته سيارة الشرطة حتى لحقت بالسيارة الأخرى.

مثال ١١

ترام يسير في خط مستقيم بين محطتين ١ و ٢ المسافة بينهما ٧٠٠ متر حيث يبدأ من المحطة ١ من السكون بعجلة منتظمة ٢ متر/ث^٢ لمدة ١٠ ثوانٍ ثم يسير بعد ذلك بسرعة منتظمة فترة من الزمن ثم يقطع مسافة ٦٠ مترًا الأخيرة من حركته بتقصير منتظم حتى يقف في المحطة ٢ أوجد الزمن الذي يستغرقه في قطع المسافة بين المحطتين.

الحل



نعتبر الاتجاه الموجب هو اتجاه حركة الترام

• باعتبار حركة الترام بين ١ و ٢ :

$$ع = ٠ ، ح = ٢ م/ث^٢ ، و = ١٠ ثوانٍ$$

$$\therefore ف = ع \cdot ح + \frac{١}{٢} ح^٢ \cdot و = ٠ + \frac{١}{٢} \cdot ٢ \cdot ١٠^٢ = ٢٠٠ \text{ متر}$$

∴ ٢٠٠ متر وهي المسافة التي قطعها الترام في الثواني العشر الأولى من حركته

$$\therefore ع = ع + ح \cdot و = ٠ + ٢ \cdot ١٠ = ٢٠ م/ث$$

∴ سرعة الترام في نهاية الثواني العشر الأولى = ٢٠ متر/ث في الاتجاه الموجب وهي

نفسها السرعة المنتظمة التي يسير بها الترام خلال قطع المسافة ٤٠٠ متر وهي أيضًا السرعة

الابتدائية بالنسبة لحركة الترام بين ٤ و ٥

• باعتبار حركة الترام بين ٤ و ٥ :

$$ع = ٢٠ م/ث ، ح = ٠ ، ف = ٦٠ مترًا$$

$$\therefore ع = ع + ح \cdot ف = ٢٠ + ٠ = ٢٠ م/ث$$

$$\therefore ح = \frac{ع - ع}{ف} = \frac{٢٠ - ٢٠}{٦٠} = ٠ م/ث^٢$$

$$\therefore ع = ع + ح \cdot و = ٢٠ + ٠ = ٢٠ م/ث$$

$$\therefore \text{زمن قطع مسافة ٦٠ مترًا الأخيرة} = ٦ \text{ ثوانٍ}$$

• باعتبار حركة الترام بين ٥ و ٦ :

$$١ = ٤ + ٥ = ٦٠ + ١٠٠ = ١٦٠ مترًا$$

∴ الحركة منتظمة السرعة

$$\therefore ٥ = ١٦٠ - ٧٠٠ = ٥٤٠ مترًا$$

$$\therefore ف = ح \cdot و = ٠$$

$$\therefore ٢٧ = \frac{٥٤٠}{٢٠} = ٢٧ \text{ ثانية وهو زمن قطع ٥٤٠ متر}$$

$$\therefore \text{الزمن كله} = ١٠ + ٢٧ + ٦ = ٤٣ \text{ ثانية}$$



من أسئلة الكتاب المدرسي

على الحركة منتظمة التغير في خط مستقيم

2

تجارب

اختبر نفسك

اولا مسائل على المعادلة الاولى

- ١ يتحرك سيارة في خط مستقيم مبدئة من السكون بعجلة منتظمة مقدارها 25 م/ث^2 في نفس اتجاه حركة السيارة. أوجد :
- ١ مقدار سرعة السيارة بعد دقيقتين بالكم/س.
- ٢ الزمن بالثواني الذي تستغرقه السيارة حتى تصبح سرعتها 65 م/ث .
- ١٠٨ كم/س و 260 ثانية.

- ٢ يتحرك جسيم في خط مستقيم بعجلة منتظمة مقدارها 8 م/ث^2 وفي اتجاه مضاد لاتجاه سرعته الابتدائية التي مقدارها 4 م/ث .
- أوجد سرعة الجسيم بعد $\frac{1}{4}$ دقيقة من بدء الحركة والزمن الذي يستغرقه الجسيم حتى يسكن.
- ١.٦ م/ث و 50 ثانية.

- ٣ بدأ جسيم حركته في اتجاه ثابت بسرعة 20 م/ث وبعجلة منتظمة 2 م/ث^2 تعمل في عكس اتجاه متجه السرعة الابتدائية. أوجد :
- ١ سرعته في نهاية 10 ثوان من بدء الحركة.
- ٢ الزمن الذي يمضي من بدء الحركة حتى تصبح سرعته 2.6 م/ث في عكس الاتجاه الذي بدأ الحركة فيه.
- صفر و 60 ثانية.

- ٤ إذا تغيرت سرعة سيارة (أ) تتحرك في خط مستقيم من 24 كم/س إلى 36 كم/س خلال 5 ثوان، وتغيرت سرعة سيارة (ب) تتحرك في نفس الخط المستقيم من 12 كم/س إلى 30 كم/س خلال نفس المدة.
- أيهما يتحرك بتسارع أكبر ؟ فسّر إجابتك.
- السيارة أ.

- ٥ يتحرك جسيم في خط مستقيم فتغيرت سرعته من 54 كم/س إلى 3 م/ث في زمن قدره نصف دقيقة. أوجد مقدار عجلة الحركة.
- هل يمكن لهذا الجسيم أن يسكن لحظياً ؟ فسّر إجابتك.
- -0.4 م/ث^2 .

- ٦ تحرك جسيم في خط مستقيم بعجلة منتظمة قدرها $\frac{1}{4} \text{ م/ث}^2$ فبلغت سرعته $\frac{1}{4} \text{ كم/س}$ في نفس اتجاه عجلته وذلك بعد مرور 12 ثانية من بدء الحركة.
- أوجد سرعته الابتدائية.
- 2.75 م/ث .

٧ يتحرك جسم في خط مستقيم بتقصير منتظم مقداره يساوي ٣ م/ث^٢ فسكن بعد ١٩ ثانية. أوجد :

١ مقدار السرعة الابتدائية.

٢ مقدار واتجاه السرعة بعد ١٣ ، ٢٥ ثانية. ٥٧ م/ث ، ١٨ م/ث ، ١٨ م/ث

٨ جسم متحرك في خط مستقيم بلغت سرعته ١٠٠ سم/ث بعد ٥ ثوانٍ من بدء حركته ، وبلغت ٧٢ سم/ث في نفس الاتجاه بعد ١٢ ثانية من بدء الحركة.

أوجد عجلته وسرعته الابتدائية وكذلك سرعته بعد ٥٠ ثانية من بدء الحركة.

٤٠ م/ث^٢ ، ١٢٠ سم/ث ، ٨٠ م/ث

ثانياً مسائل على المعادلة اللالية

١ يتحرك جسم في خط مستقيم بسرعة ابتدائية ٧ م/ث ويعجلة منتظمة ٤ م/ث^٢ في اتجاه حركته. أوجد سرعته والمسافة التي يقطعها خلال ٦ ثوانٍ.

٣١ م/ث ، ١١٤ م

٢ يتحرك جسم في خط مستقيم بعجلة ٤٠ سم/ث^٢ في اتجاه سرعته الابتدائية فإذا كانت إزاحة الجسم ٢٥ متراً في نفس اتجاه بداية الحركة بعد ١٠ ثوانٍ. احسب مقدار السرعة الابتدائية وكذلك مقدار سرعته في نهاية هذه المدة.

١٠٥ م/ث ، ٥٠ م/ث

٣ يتحرك جسم في خط مستقيم بعجلة منتظمة ٤٠ سم/ث^٢ وبسرعة ابتدائية ٣٦ كم/س في نفس اتجاه متجه عجلته.

أوجد بعد كم ثانية يصبح على بُعد ٤٣.٢ متر من نقطة الابتداء.

٤ ثوانٍ

٤ يتحرك جسم في خط مستقيم فإذا كانت سرعته في لحظة ما ٥٠ سم/ث ، عجلته ٤ سم/ث^٢ في اتجاه مضاد لاتجاه هذه السرعة.

أوجد متى وأين يسكن هذا الجسم سكوناً لحظياً.

١٢.٥٠ ثانية ، ٣١٢.٥ م

٥ يتحرك جسم في خط مستقيم بعجلة منتظمة فقطع ٥٢ متراً في الثوان الأربعة الأولى ثم قطع مسافة ٩٢ متراً في الثوان الأربعة التالية لها. احسب عجلة الحركة والسرعة الابتدائية والمسافة المقطوعة خلال ١٠ ثوان الأولى من الحركة.

٢.٥ م/ث^٢ ، ٨ م/ث ، ٢٢.٥ م

٦ تحركت كرة صغيرة بسرعة ١٥٠ سم/ث على مستوى أفقى فى خط مستقيم بتقصير منتظم مقداره ١٥ سم/ث^٢.

أوجد الزمن الذى يمضى من لحظة تحرك الكرة حتى تصبح على بعد ٧٢٠ سم من نقطة بداية الحركة.

٨ ، ١٢ ، ٢٤ ثانية.

٧ قذفت كرة صغيرة أفقياً فى عكس اتجاه الرياح بسرعة ابتدائية ٧٢ سم/ث وتحركت فى خط مستقيم بعجلة ٧ سم/ث^٢ وفى اتجاه مضاد لاتجاه السرعة الابتدائية.

أوجد متى تقف هذه الكرة لحظياً ثم أوجد مقدار إزاحة الكرة بعد ٨ ، ١٨ ، ٢٤ ثانية من بدء الحركة. ماذا تلاحظ ؟

١٠ ثانية ، ٣٥٢ سم ، ١٦٢ سم ، ٢٨٨ سم.

٨ قذفت كرة أفقياً فى عكس اتجاه الرياح بسرعة ٤٥ سم/ث فتحركت فى خط مستقيم حركة تقصيرية بعجلة ثابتة = ٦ سم/ث^٢. أوجد :

١ متى تعود الكرة إلى النقطة التى قذفت منها.

٢ متى تكون الكرة على بعد ١٦٢ سم من نقطة القذف. ١٥ ، ٦ ، ٩ ، ١٨ ثانية.

٩ بدأ جسيم حركته بسرعة ٦٠ سم/ث فى خط مستقيم من نقطة ثابتة (و) وبتقصير منتظم ٧٠ سم/ث^٢. أوجد متى يكون الجسيم على بعد ١٠٥ سم من النقطة (و) فى نفس الجهة

التي بدأ الجسيم حركته ناحيتها ومتى يكون الجسيم على بعد ٣٠٠ سم من النقطة (و) فى الجهة الأخرى منها.

٢٠ ، ١٤ ثانية ، ٢٠ ثانية.

ثالث مسائل على المعادلة الثالثة

١ انطلقت سيارة من السكون بتسارع مقداره ٤ م/ث^٢.

ما المسافة التى تقطعها السيارة عندما تصبح سرعتها ٢٤ م/ث ؟

٧٢٠ متر.

٢ تسير سيارة سباق فى الحلبة بسرعة ٤٤ م/ث ثم تناقصت سرعتها بمعدل ثابت ،

حتى أصبحت ٢٢ م/ث خلال ١١ ثانية.

أوجد المسافة التى قطعتها السيارة خلال هذا الزمن.

٤٦٣ متر.

٣ يتحرك قطار فى خط مستقيم بسرعة ٤٥ كم/س وعندما اقترب من المحطة ضغط السائق على

الفرامل فتحرك القطار بتقصير منتظم مقداره ١ ١/٢ متر/ث^٢ حتى وقف فى المحطة.

احسب المسافة التى قطعها القطار من لحظة استخدام الفرامل وحتى وقف.

٦٢.٥ متر.

٤ سيارة تتحرك في خط مستقيم وعندما كانت سرعتها ٧٢ كم/س استخدمت الفرامل فتحركت حركة تقصيرية منتظمة التغير وأصبحت سرعتها ٥٤ كم/س بعد مسافة قدرها ١٤٠ مترًا.

أوجد عجلة الحركة والمسافة التي تقطعها السيارة من لحظة استخدام الفرامل حتى تسكن.
٥٠ م/ث ، ٢٢٠ مترًا

٥ نقصت سرعة سيارة بانتظام من ١٣٢ كم/س إلى ٢٤ كم/س بعد أن قطعت مسافة ١١٧٠ مترًا.

أوجد الزمن الذي قطعت فيه السيارة هذه المسافة وما المسافة التي تقطعها بعد ذلك حتى تسكن.
٥٤ ثانية ، ٤٠ مترًا

٦ أطلقت رصاصة بسرعة ٥٠ م/ث على هدف ثابت فسكنت فيه بعد أن غاصت مسافة ٢٥ سم أوجد السرعة التي تنفذ بها الرصاصة في نفس الهدف إذا كان سمكه ١٦ سم على فرض ثبوت العجلة في الحالتين.
٣٠٠ م/ث

٧ ١١ قذف جسيم في عكس اتجاه الرياح بسرعة ٤٠ م/ث ، فتحرك في خط مستقيم حركة تقصيرية بعجلة منتظمة مقدارها ٨ م/ث^٢. أوجد سرعة الجسيم عندما يكون على بعد :
١ ٨٤ سم من نقطة القذف في اتجاه القذف.

٢ ٩٦ سم من نقطة القذف وفي الجهة الأخرى بالنسبة لجهة القذف ، وفسر معنى الأجوبة التي تحصل عليها.

١٦ م/ث في اتجاه القذف ، ١٦ م/ث في عكس اتجاه القذف ، ٥٦ م/ث في عكس اتجاه القذف

رابعاً مسائل على السرعة المتوسطة خلال الثانية النولية

١ يتحرك جسم في خط مستقيم بعجلة منتظمة على مستوى أفقى أملس فقطع ٢٦ مترًا خلال الثانية الرابعة من بدء الحركة ، ٥٦ مترًا خلال الثانية التاسعة. أوجد سرعته الابتدائية ومقدار عجلته.

٥٠ م/ث ، ٦ م/ث^٢

٢ بدأ جسم حركته في اتجاه ثابت بسرعة ١٥ م/ث وعجلة منتظمة ٤ م/ث^٢ في نفس اتجاه سرعته. احسب :

١ المسافة التي يكون الجسم قد قطعها في الثانية السادسة فقط.

٢ المسافة التي يكون الجسم قد قطعها في الثانية السابعة والثامنة فقط.

٣٧٠ سم ، ٨٦ م

٢ يتحرك جسيم بسرعة ابتدائية ما في اتجاه ثابت وبعجلة منتظمة ، فإذا قطع في الثانية الثالثة من حركته مسافة ٢٠ مترًا ، ثم قطع في الثانية الخامسة والسادسة معًا مسافة ٦٠ مترًا. احسب العجلة التي يتحرك بها الجسيم وسرعته الابتدائية.

٤ يتحرك جسيم بعجلة منتظمة في اتجاه ثابت. فإذا قطع ٢٠ مترًا خلال الثانية الثالثة من بدء حركته ، ١٥٠ مترًا في الثواني الثامنة والتاسعة والعاشر. احسب العجلة التي يتحرك بها الجسيم والسرعة عند بدء حركته.

٥ تحركت نقطة مادية في خط مستقيم ابتداءً من السكون بعجلة منتظمة فقطعت خلال الثواني الخامسة والسادسة والسابعة مسافة قدرها ١٢٢ سم أوجد كلاً من العجلة والمسافة التي تقطعها من بدء الحركة حتى تبلغ سرعتها ٦٦ سم/ث.

٦ يتحرك جسيم بعجلة منتظمة فقطع في الثواني الأربعة الأولى من حركته مسافة ٢٠٠ متر ثم قطع ٥٠ مترًا في الثانية السابعة والثامنة. أوجد سرعته الابتدائية والمسافة التي يقطعها منذ بدء حركته حتى يتوقف لحظيًا.

٧ بدأ جسم حركته بسرعة ٧ م/ث وبعجلة منتظمة ٢ م/ث^٢ فقطع مسافة ٣٠ مترًا ثم انقطعت العجلة وسار بسرعة منتظمة مسافة ٥٢ مترًا. أوجد :

- ١ الزمن الكلي للحركة. ٢ المسافة المقطوعة في الثانية الثالثة.

٧ ثوانٍ ، ١٢ م

خامساً مسائل عامة

١ أكمل باستخدام أحد الرموز الآتية : (ع ، ح ، ن ، ف)

- ١ عند بدء الحركة لجسم فإن : = صفر
٢ إذا بدأ الجسم حركته من السكون فإن : = صفر
٣ عند وصول الجسم إلى أقصى بُعد فإن : = صفر
٤ إذا تحرك الجسم بسرعة منتظمة فإن : = صفر
٥ إذا عاد الجسم إلى موضعه الأصلي الذي بدأ الحركة منه فإن : = صفر

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) بدأ جسم حركته بسرعة ٢٤ م/ث بتقصير منتظم ٨ م/ث^٢ فإن :

الجسم يتوقف لحظياً بعد زمن = ثانية.

- (١) ٣ (ب) ١٦ (ج) $\frac{1}{3}$ (د) ٣٠

(٢) بدأ جسم حركته بسرعة ١٢٦ كم/ساعة وتوقف بعد أن قطع مسافة ١٢٢,٥ متر فإن :

عجلة الحركة للجسم = م/ث^٢.

- (١) ٥- (ب) ٥ (ج) $\frac{324}{5}$ (د) $\frac{324-}{5}$

(٣) المسافة التي يقطعها جسم يتحرك في اتجاه ثابت من السكون بعجلة مقدارها

٥ سم/ث^٢ في زمن قدره ٤ ثوان = سم.

- (١) ١٠ (ب) ٢٠ (ج) ٤٠ (د) ٨٠

(٤) يتحرك جسم في اتجاه ثابت بعجلة منتظمة ٨ سم/ث^٢ في نفس اتجاه سرعته

الابتدائية فإذا قطع الجسم مسافة ٦٠٠ سم في الثواني العشر الأولى من حركته

فإن سرعته الابتدائية = سم/ث.

- (١) ٢٠ (ب) ٣٠ (ج) ٦٠ (د) ٧٥

(٥) يتحرك جسم في خط مستقيم بسرعة ابتدائية ٥٠ سم/ث وبالعجلة منتظمة ٥ سم/ث^٢

في اتجاه سرعته فإن المسافة التي يكون قد قطعها عندما تبلغ سرعته ١ م/ث

هي متر.

- (١) ٧,٥ (ب) ٧٥٠ (ج) ١٠٠ (د) ٥٠

(٦) السرعة المتوسطة لجسم يتحرك بسرعة ابتدائية ع. وعجلة منتظمة ح خلال الثانية

السادسة من حركته =

- (١) ع. + ٥ ح (ب) ع. + ٦ ح

- (ج) ع. + $\frac{1}{4}$ ح (د) ع. + ٣ ح

(٧) السرعة المتوسطة لجسم يتحرك بسرعة ابتدائية ع. وعجلة منتظمة ح خلال الثواني

السابعة والثامنة والتاسعة =

- (١) ع. + $\frac{1}{4}$ ح (ب) ع. + ٨ ح

- (ج) ع. + $\frac{1}{4}$ ح (د) ع. + ٩ ح

٨٠) يتحرك جسيم من السكون في خط مستقيم بعجلة منتظمة فقطع ٢٤ مترًا في الثواني الأربع الأولى من حركته ، فإن مقدار عجلته = م/ث^٢

- (١) ٣ (ب) ٦ (ج) ١٢ (د) $\frac{2}{3}$

٩٠) ١٨٠ مترًا/ساعة / ث = سم/ث^٢

- (١) $\frac{1}{4}$ (ب) ٥ (ج) ٣٠ (د) ٣٠٠

٩١) بدأ جسيم حركته من السكون في خط مستقيم بعجلة منتظمة ٣ سم/ث^٢ فقطع مسافة ٢٤ سم فإن سرعته في نهاية تلك المسافة = سم/ث.

- (١) ١٤٤ (ب) ١٢ (ج) ٢٤ (د) ٧٢

٩٢) إذا بدأ جسيم حركته بسرعة ٣٠ سم/ث وبالعجلة منتظمة ٥ سم/ث^٢ في اتجاه سرعته الابتدائية ، فإن المسافة المقطوعة بعد ١٠ ثوان من بدء الحركة = سم

- (١) ٥٥٠ (ب) ٣٠٠ (ج) ٧٥٠ (د) ١٥٠٠

٩٣) إذا تحرك جسيم في خط مستقيم من السكون بعجلة منتظمة (ح) فإن الإزاحة الحادثة (ف) \propto

- (١) t^2 (ب) t (ج) t^3 (د) t^4

٩٤) يتحرك جسم بسرعة ابتدائية (ع) سم/ث وبالعجلة منتظمة (ح) سم/ث^٢ وسرعة

نهائية (ع) سم/ث وكان ع - ع = ١٠ سم/ث ، $\sqrt{2}$ ح ف = ٢٠ سم/ث

فإن : $\frac{ع}{ح} =$

- (١) $\frac{17}{9}$ (ب) $\frac{5}{4}$ (ج) $\frac{9}{4}$ (د) $\frac{9}{5}$

٩٥) طائرة تتزايد سرعتها بمعدل ١٥ م/ث^٢ فإن الزمن اللازم لزيادة السرعة من ١٠٠ م/ث إلى ١٦٠ م/ث هو ثانية.

- (١) ١٧ (ب) ٠,٠٥ (ج) ٤ (د) ١,٢٥

٩٦) قذفت كرة أفقيًا في عكس اتجاه الرياح بسرعة ابتدائية ع = ١٥ سم/ث فتحركت

بتقصير منتظم ٥ سم/ث^٢ فإن الزمن الذي تستغرقه الكرة حتى تعود إلى نقطة

البداية = ثانية.

- (١) ٢ (ب) ٣ (ج) ٤ (د) ٦

١٧ في الشكل المقابل :

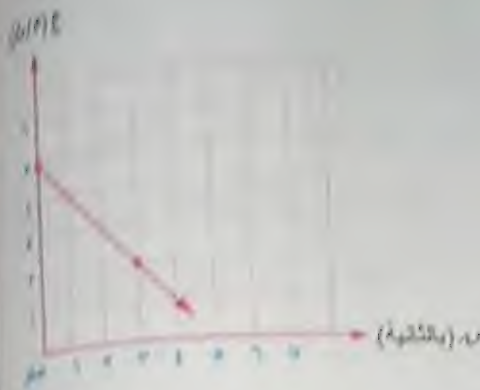
العجلة (ح) م/ث^٢

٢ (١)

٢- (ب)

٣- (ج)

١- (د)



١٨ تتساقط قطرات الزيت من إحدى السيارات

المتحركة من اليسار إلى اليمين كما بالشكل المقابل

بملاحظة قطرات الزيت فإن السيارة تتحرك

(١) بسرعة منتظمة. (ب) بعجلة.

(ج) بتقصير (د) بتقصير ثم سرعة منتظمة.

٣ بدأ جسم حركته في اتجاه ثابت بسرعة ٥٤ كم/س وتوقف بعد ٥ ثوان، أوجد :

١ عجلة حركة الجسم. ٢ المسافة المقطوعة خلال هذه الفترة.

$$٢-٥ \text{ م/ث}^٢, ٢٧٠ \text{ م}$$

٤ يتحرك راكب دراجة بعجلة منتظمة حتى صارت سرعته ٧.٥ م/ث خلال ٤.٥ ثانية

فإذا كانت إزاحه الدراجة خلال فترة التسارع تساوي ١٩ متراً.

أوجد السرعة الابتدائية للدراجة.

$$١٥ \text{ م/ث}$$

٥ هبط من السكون راكب دراجة من قمة تل متحدراً بعجلة ثابتة مقدارها ٢ م/ث^٢

، وعندما وصل إلى قاعدة التل بلغت سرعته ١٨ م/ث ثم سار بهذه السرعة لمدة دقيقة واحدة.

أوجد المسافة الكلية التي قطعها راكب الدراجة.

$$١١٦١ \text{ م}$$

٦ بدأ جسم حركته من السكون في خط مستقيم أفقى بعجلة منتظمة مقدارها ٤ سم/ث^٢

لمدة ٣.٠ ثانية ، ثم تحرك بالسرعة التي اكتسبها لمدة ٤.٠ ثانية أخرى في نفس الاتجاه.

أوجد سرعته المتوسطة.

$$٩٤ \text{ سم/ث}$$

٧ بدأ جسم حركته من السكون بعجلة منتظمة 20 سم/ث^2 وعندما أصبحت سرعته 8 م/ث تحرك بتقصير منتظم 25 سم/ث^2 حتى سكن. أوجد الزمن الكلي والمسافة المقطوعة.

«٧٢ ثانية ، ٢٨٨ مترًا»

٨ يتدرب كريم على ركوب الدراجة ، يدفعه والده فيكتسب تسارعًا ثابتًا مقداره $\frac{1}{4} \text{ م/ث}^2$ لمدة 6 ثوان ، وبعد ذلك يقود كريم الدراجة بمفرده بالسرعة التي اكتسبها لمدة 6 ثوان أخرى قبل أن يسقط أرضًا. أوجد مقدار المسافة التي يقطعها كريم.

«٢٧ متر»

٩ قائد سيارة يتحرك بسرعة ثابتة مقدارها 24 م/ث ، شاهد فجأة طفلًا يمر في الشارع ، فإذا كان الزمن اللازم لاستجابة الفرامل هو $\frac{1}{4}$ ثانية ثم تحركت السيارة بتقصير منتظم مقداره 9.6 م/ث^2 حتى وقفت. أوجد المسافة الكلية التي تحركتها السيارة قبل أن تقف مباشرة.

«٤٢ متر»

١٠ بدأ جسم حركته من سكون في خط مستقيم بعجلة منتظمة 0.36 كم/س/ث . وعندما أصبح سرعته 8 م/ث تحرك بتقصير منتظم حتى سكن بعد 112 ثانية من بداية الحركة. احسب التقصير المنتظم والمسافة الكلية.

« $\frac{1}{4}$ متر/ث^٢ ، ٤٤٨ متر»

١١ تحرك جسم من سكون فقطع 150 م حتى أصبحت سرعته 54 كم/س فإذا انقطعت العجلة عندئذ وسار بالسرعة التي اكتسبها مسافة 300 متر ، ثم تحرك بعد ذلك بتقصير منتظم قدرة $\frac{2}{3} \text{ م/ث}^2$ حتى سكن. احسب السرعة المتوسطة خلال الرحلة كلها.

«١٠.٥ متر/ث»

١٢ تحركت سيارة من السكون في خط مستقيم بعجلة منتظمة 3 متر/ث^2 وفي اللحظة التي بلغت فيها سرعتها 118.8 كم/س شاهد سائقها طفلًا يعبر الشارع فضغط على الفرامل فوقفت بعد أن قطعت مسافة 24.75 مترًا . أوجد المسافة الكلية التي تحركتها السيارة والزمن الكلي لحركتها.

«٢٠٦.٢٥ مترًا ، ١٢.٥ ثانية»

١٣ تحرك جسيم من السكون في اتجاه ثابت بعجلة منتظمة وعند نهاية 400 متر كانت سرعته 10 متر/ث فسار بهذه السرعة مسافة 800 متر ثم تحرك حركة تقصيرية بعجلة منتظمة مسافة 200 متر حتى سكن لحظيًا. أوجد الزمن الذي استغرقه في قطع المسافة كلها وسرعته المتوسطة خلال قطعها.

«٢٠٠ ثانية ، ٧ متر/ث»

١٤ أطلقت رصاصة بسرعة ٢٠٠ م/ث في اتجاه عمودي على حائط رأسى سمكه ١٤ سم ، فخرجت منه بسرعة ١٥٠ م/ث. أوجد مقدار العجلة ، وإذا أطلقت الرصاصة بنفس السرعة على حائط رأسى آخر له نفس المقاومة ، فأوجد المسافة التى تغوصها حتى تسكن ، على بأن العجلة التى تتحرك بها الرصاصة واحدة فى الحالتين.

١٥ تحرك جسم فى خط مستقيم فقطع ٥٢ سم فى ٤ ثوان بعجلة منتظمة ، ثم أوقفت العجلة لمدة ٣ ثوان قطع خلالها الجسم مسافة ٤٨ سم ، ثم تحرك الجسم بعد ذلك بتقصير منتظم يساوى ضعف عجلته الأولى حتى وقف تمامًا. أوجد السرعة الابتدائية للجسم ثم احسب المسافة الكلية التى قطعها الجسم.

١٦ تحرك جسيم فى خط مستقيم من السكون فقطع مسافة ١٢٥ مترًا بعجلة منتظمة ١٠ متر/ث^٢ ثم انقطعت العجلة فسار بالسرعة التى اكتسبها مسافة أخرى قدرها ٤٠٠ متر ، ثم تحرك حركة تقصيرية بعجلة منتظمة ٥ متر/ث^٢ حتى سكن. أوجد الزمن الذى قطع فيه المسافة كلها.

١٧ يتحرك جسيم فى خط مستقيم بعجلة منتظمة ٢ متر/ث^٢ فى اتجاه حركته وبعد أن قطع مسافة ١٥٠ مترًا انقطعت العجلة وسار بالسرعة التى اكتسبها فى نهاية هذه المسافة لمدة ٢٠ ثانية ، فإذا كانت المسافة الكلية التى قطعها الجسيم هى ١١٥٠ مترًا. فأوجد سرعته التى بدأ بها حركته.

١٨ بدأت سيارة الحركة من سكون بعجلة منتظمة ١٨٠ كم/س لكل دقيقة وبعد ٢٤ ثانية أوقفت العجلة فتناقصت السرعة بانتظام بفعل الاحتكاك ومقاومة الهواء بمعدل ٤٥٠ متر/س/ث وبعد ٣٢ ثانية استخدمت فرامل السيارة فأوقفتها فى مدة ٨ ثوان. أوجد المسافة الكلية التى قطعها السيارة.

١٩ يتحرك جسم فى خط مستقيم بسرعة منتظمة ٢٥ سم/ث ، وبعد ثانيتين من مرور بموضع معين تحرك جسم آخر من نفس الموضع وفى نفس الاتجاه بسرعة ابتدائية ١٥ سم/ث وبالعجلة منتظمة ٨ سم/ث^٢ متى يتلاقى الجسمان ؟

٢٠ تتحرك كرة صغيرة في خط مستقيم بسرعة منتظمة ١٢ سم/ث وبعد ٤ ثوان من مرورها بنقطة معينة تحركت كرة أخرى من هذه النقطة في نفس اتجاه حركة الكرة الأولى وبسرعة ابتدائية ٤ سم/ث وبمعجلة منتظمة ٢ سم/ث^٢.

أوجد متى وأين تصادم الكرتان وكم كانت سرعة الكرة الثانية قبل الاصطدام مباشرة.

١٢٠ ثانية من بدء تحرك الكرة الثانية ، ١٩٢ سم ، ٢٨ سم/ث

٢١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ في التمثيل البياني لمنحنى السرعة والزمن فإن الميل السالب يشير إلى

- (أ) الجسم يتحرك للخلف.
(ب) الجسم يتحرك بتسارع.
(ج) الجسم يتحرك بتقصير.
(د) الجسم يتحرك بسرعة منتظمة.

٢ جسم يتحرك في الاتجاه الموجب لمحور السينات بمعجلة ٢ م/ث^٢

فإن ذلك يعنى أن

- (أ) الجسم يتحرك ٢ متر كل ثانية.
(ب) الجسم يتحرك بسرعة ٢ م/ث
(ج) سرعة الجسم تتناقص بمقدار ٢ م/ث كل ثانية.
(د) سرعة الجسم تزايد بمقدار ٢ م/ث كل ثانية.

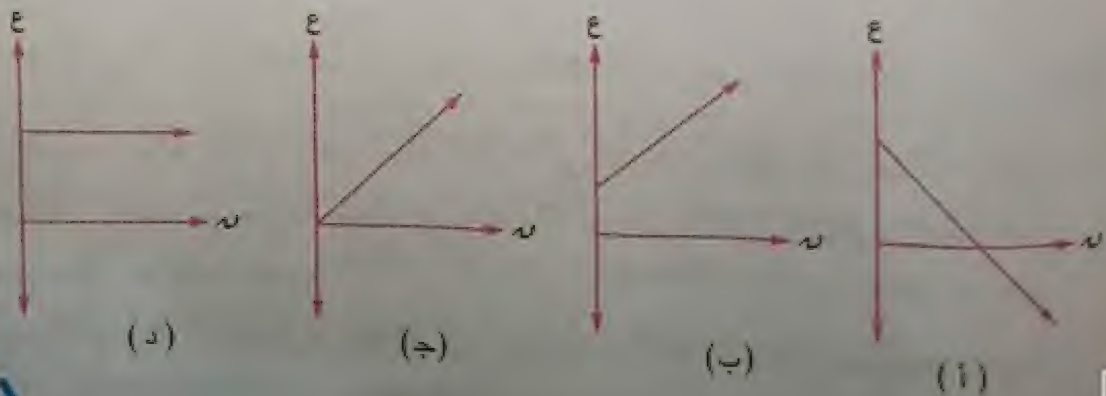
٣ طُلب من أحد المهندسين تصميم ممر إقلاع لأحد المطارات فإذا كان أقل تسارع

للطائرات التى ستستخدم هذا الممر هو ٢ م/ث^٢ وسرعة إقلاع الطائرات هو ٦٥ م/ث فإن أقصر طول لممر الإقلاع = متر.

- (أ) $\frac{1}{4} 704$ (ب) $\frac{5}{9} 810$ (ج) $\frac{1}{4} 406$ (د) $\frac{1}{9} 704$

٤ أى من منحنيات (السرعة ، الزمن) الآتية يمثل حركة جسم بحيث يكون $a < 0$.

أ. > ٠ ؟



٢٣ جسم يتحرك في خط مستقيم بعجلة ثابتة فتتحرك ١٠ متر في الثانية الأولى و١٥ متر في الثانية الثانية فإن المسافة المقطوعة خلال الثانية الثالثة = متر.

- (أ) ٢٠ (ب) ٢٥ (ج) ٣٠ (د) ٤٥

٢٤ سيارة تبدأ حركتها من السكون عند ١ وتتحرك في خط مستقيم بعجلة ثابتة لمدة ٢٠ ثانية حتى تصل إلى النقطة (ب) فإذا كانت سرعة السيارة عند النقطة (ب) ٣٠ م/ث فإن سرعة السيارة عند النقطة (ج) = م/ث حيث أن حركتها بين ١ ، ب حيث ٢ ح = ٤٠ متر.

- (أ) ١٠ (ب) ١١ (ج) ١٣ (د) ١٥

٢٥ متسابق يتحرك بعجلة منتظمة يمر بثلاث نقط ١ ، ب ، ج على استقامة واحدة حيث ١ ب = ب ج = ج د = ٢٠ متر فإذا كانت سرعة المتسابق عند ١ تساوي ٨ م/ث وسرعته عند ب تساوي ١٢ م/ث فإن سرعته عند ج هي م/ث

- (أ) ١٦ (ب) ٢٠ (ج) ٢١ (د) ٢٤

٢٦ جسمان يتحركان على نفس الخط الأفقي كل منهما في اتجاه الآخر إذا تحرك الجسم الأول من نقطة ١ بسرعة ابتدائية ٨ م/ث وعجلة $\frac{3}{4}$ م/ث^٢ وتحرك الجسم الثاني من نقطة ب بسرعة ابتدائية ٤ م/ث وعجلة $\frac{5}{4}$ م/ث^٢ إذا كان ١ ب = ٦٤ مترًا. الجسمان يتصادمان بعد ثانية.

- (أ) ٢ (ب) ٤ (ج) ٦ (د) ٨

٢٧ تتحرك سيارة ١ بسرعة منتظمة مقدارها ١٥ م/ث وفي نفس اللحظة ومن نفس النقطة تحركت سيارة أخرى ب من السكون بعجلة مقدارها ٣ م/ث^٢ في نفس اتجاه حركة السيارة ١ فإن السيارتان تتقابلان بعد ثانية.

- (أ) ٥ (ب) ٣ (ج) ١٥ (د) ١٠

٢٨ مصعد ساكن بقاع منجم ، أخذ المصعد في الارتفاع بعجلة مقدارها ١٢٠ سم/ث^٢ مسافة ٥٤٠ سم ثم بسرعة منتظمة مسافة ٣٦٠ سم ثم بتقصير منتظم مسافة ٧٢٠ سم حتى سكن عند فوهة المنجم.

احسب الزمن الذي استغرقه المصعد في الصعود من قاع المنجم إلى فوهته.

٢٣ قطار يسير في خط مستقيم بين محطتين المسافة بينهما ٥٢٨٠ مترًا فيبدأ من السكون من إحدى المحطتين ويسير بعجلة منتظمة ٢.٢ متر/ث^٢ إلى أن تبلغ سرعته ٤٤ متر/ث فيسير بهذه السرعة فترة من الزمن ثم يسير بعجلة منتظمة في عكس اتجاه الحركة قدرها ١.١ متر/ث^٢ إلى أن يقف في المحطة الأخرى.

أوجد الزمن الذي يستغرقه في السير بين المحطتين.

٢٤ يتحرك ترام بين محطتين المسافة بينهما ٧٠٠ متر فيبدأ من السكون من المحطة الأولى بعجلة ١ $\frac{1}{4}$ متر/ث^٢ لمدة عشر ثوان ، ثم يسير بعد ذلك بسرعة منتظمة فترة من الزمن ، ثم يقطع أخيرًا مسافة ٦٠ مترًا تكون حركته خلالها تقصيرية حتى يتوقف في المحطة الثانية. أوجد الزمن الذي استغرقه في قطع المسافة بين المحطتين.

٢٥ يسير قطار في خط مستقيم بين محطتين مبتدئًا من السكون بعجلة منتظمة (ح) م/ث^٢ لمدة دقيقة واحدة وبعدها يسير بالسرعة التي اكتسبها بانتظام لمدة دقيقتين ثم يسير بعد ذلك بعجلة منتظمة (٢) ح) م/ث^٢ في عكس اتجاه الحركة حتى يسكن. أوجد النسبة بين المسافات الثلاثة التي يتحركها. وإذا كانت المسافة بين المحطتين ٩.٩ كم.

فأوجد مقدار ح والسرعة المنتظمة التي تحرك بها. $٢.٨ - ١.١ - ١.٨$ متر/ث^٢ ، ٦٠ متر/ث^٢

٢٦ تحرك جسيم في خط مستقيم حركة متسارعة بعجلة منتظمة مقدارها (ح) سم/ث^٢ فقطع مسافة ٤٠٠ سم في ١٠ ثوان ثم زاد مقدار العجلة فأصبح (٢) ح) سم/ث^٢ فقطع الجسيم مسافة أخرى قدرها ٧٠٠ سم في ١٠ ثوان ، ثم تحرك الجسيم حركة تقصيرية بعجلة مقدارها (٣) ح) سم/ث^٢ حتى سكن.

احسب قيمة (ح) والمسافة الكلية التي تحركها الجسيم. ٢٠ سم/ث^٢ ، ١٧٧٥ سم

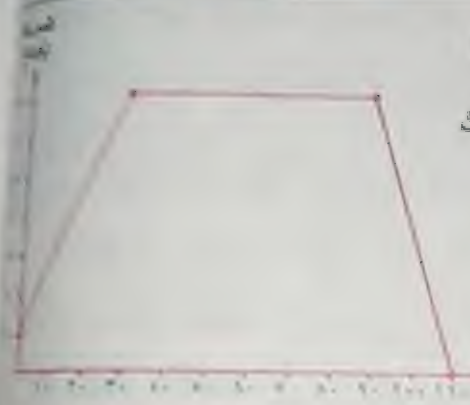
٢٧ س ، ص نقطتان على طريق مستقيم أفقى بدأت سيارة أ الحركة من س نحو ص من السكون وبعجلة منتظمة ١٠ م/ث^٢ وفي نفس اللحظة كانت تتحرك سيارة أخرى ب من ص نحو س بسرعة منتظمة مقدارها ٥٤ كم/س ، فإذا كانت السرعة النسبية للسيارة أ بالنسبة للسيارة ب لحظة التقائهما تساوي ١٦٢ كم/س.

أوجد الزمن الذي تأخذه كل من السيارتين من لحظة تحركهما معًا حتى لحظة التقائهما. ٢٠ ثانية.

٢٨ كرة صغيرة تم دفعها في عكس اتجاه الرياح بسرعة أفقية مقدارها ٩ م/ث فتتحركت في خط مستقيم حركة تقصيرية بعجلة منتظمة مقدارها ١.٨ م/ث^٢. أوجد :

- ١) إزاحة الكرة عندما تسكن لحظيًا.
- ٢) المسافة التي تقطعها الكرة من بدء الحركة حتى تعود للنقطة التي نُفِعت منها.
- ٣) إزاحة الكرة بعد زمن قدره ٨ ثوانٍ من بدء الحركة والمسافة التي تكون الكرة قد قطعتها عندئذ.

٤) سرعة الكرة عندما تكون على بُعد ٤٠ مترًا في الجهة المضادة للجهة التي بدأت فيها الحركة
٢٢.٥٠ مترًا ، ٤٥ مترًا ، ١٤.٤ مترًا ، ٣٠.٦ مترًا ، ١٥ م/ث في الاتجاه المعاكس



٢٩ الشكل المقابل يمثل منحنى (السرعة - الزمن)

لجسم بدأ التحرك بسرعة ابتدائية مقدارها ١٠ م/ث وحتى سكن بعد زمن قدره ١١ ثانية.
أوجد :

- ١) عجلة التسارع.
 - ٢) مقدار التقصير المنتظم للجسم حتى يسكن.
 - ٣) المسافة الكلية التي تحركها الجسم.
- ٢٠ م/ث^٢ ، ٣.٥ م/ث^٢ ، ١١.٠ متر

مسائل تقيس مستويات عليا من التفكير

٣٠ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

- ١) أي مما يأتي يكون مستحيل الحدوث لجسم يتحرك في خط مستقيم ؟
 - (أ) له سرعة في اتجاه الشرق وعجلة في اتجاه الغرب.
 - (ب) له سرعة في اتجاه الشرق وعجلة في اتجاه الشرق.
 - (ج) له عجلة ثابتة غير صفيرية وسرعة متغيرة.
 - (د) له سرعة ثابتة غير صفيرية وعجلة متغيرة.
- ٢) يتحرك جسم من السكون بعجلة منتظمة لمدة ٢٠ ثانية فإذا قطع مسافة (ف_١) في العشر ثواني الأولى وقطع مسافة (ف_٢) في العشر ثواني التالية فإن
 - (أ) ف_١ = ف_٢ (ب) ف_٢ = ٢ ف_١ (ج) ف_٢ = ٣ ف_١ (د) ف_٢ = ٤ ف_١

٣) بدأ قطار حركته من السكون من إحدى المحطات بعجلة ١ م/ث^٢ وفي نفس اللحظة يتحرك رجل بسرعة منتظمة ١٠ م/ث خلف القطار وعلى بُعد ٥٠ متر من آخر باب في القطار في نفس اتجاه حركة القطار فإن الزمن اللازم للرجل حتى يلحق بالقطار = ثانية.

- (١) ٥ (ب) ١٠ (ج) ١٥ (د) ٢٠

٤) قطار متحرك بعجلة منتظمة فإذا عبرت مقدمة القطار نقطة ثابتة بسرعة (١ع) وعبرت مؤخرة القطار نفس النقطة الثابتة بسرعة (٢ع) فإن نقطة منتصف القطار تعبر نفس النقطة الثابتة بسرعة

(١) $\frac{١ع + ٢ع}{٢}$ (ب) $\frac{٢ع + ٢ع}{٢}$ (ج) $\sqrt{\frac{١ع + ٢ع}{٢}}$ (د) $\sqrt{\frac{٢ع + ٢ع}{٢}}$

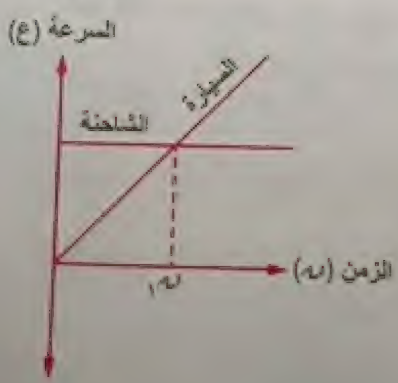
٥) بدأ جسم حركته بسرعة ابتدائية ٧ سم/ث في خط مستقيم بعجلة منتظمة ٤ سم/ث^٢ فقطع مسافة ٣٠ سم ثم انقطعت العجلة وسار بسرعة منتظمة مسافة ٣٤ سم فإن المسافة المقطوعة في الثانية الثالثة فقط هي سم.

- (١) ١٦,٥ (ب) ١٧ (ج) ١٧,٥ (د) ١٨

٦) إذا فقد جسم نصف سرعته في غوص مسافة ٣ سم في حاجز خشبي سمكه ١٠ سم فإن المسافة التي يقطعها الجسم بعد ذلك حتى يسكن = سم.

- (١) ١ (ب) ٢ (ج) ٣ (د) ٤

٧) إذا كانت حركة شاحنة وسيارة يبدأان من نفس المكان وفي خط مستقيم وكان الشكل المقابل يمثل منحنى «السرعة - الزمن» فإن أى مما يأتى صحيح بالنسبة للمسافة المقطوعة حتى اللحظة (١م) ؟



(١) لهما نفس المسافة المقطوعة.

(ب) الشاحنة لا تتحرك.

(ج) السيارة تتحرك مسافة أكثر من الشاحنة.

(د) الشاحنة تتحرك مسافة أكثر من السيارة.

٨ الشكل المقابل يمثل منحنى «الموضع - الزمن»

لجسمين ١ ، ٢ أى مما يأتى يكون صحيح ؟

(أ) كل من ١ ، ٢ يتحرك بسرعة منتظمة متساوية.

(ب) ١ يتحرك بتسارع بينما ٢ يتحرك بتباطؤ.

(ج) كل من ١ ، ٢ يتحرك بسرعة منتظمة وسرعة ١ أكبر من سرعة ٢

(د) كل من ١ ، ٢ يتحرك بسرعة منتظمة وسرعة ٢ أكبر من سرعة ١

٩ يتحرك الجسمان ١ ، ٢ فى الاتجاه الموجب لمحور السينات بحيث كان الجسم ١ خلف

الجسم ٢ بمسافة ٤٠ متر فإذا تحرك الجسم (١) بسرعة ابتدائية ١٢ م/ث وبمعجلة

٤ م/ث^٢ بينما بدء الجسم (٢) التحرك بسرعة ابتدائية ٤ م/ث وبمعجلة ١٢ م/ث^٢

فإن أقل مسافة بين الجسمين = متر.

(أ) ٢٠ (ب) ٢٢ (ج) ٣٦ (د) ٤٠

٣١ تتحرك سيارة بسرعة منتظمة ٥٤ كم/س ، مرت على سيارة شرطة ساكنة فبدأت

سيارة الشرطة فى متابعتها بعد ٣٠ ثانية من مرورها متحركة بمعجلة منتظمة مسافة

٢٠٠ متر ، حتى بلغت سرعتها ٧٢ كم/س ثم سارت بهذه السرعة حتى لحقت بالسيارة

الأولى. أوجد الزمن الذى استغرقته عملية المطاردة من لحظة تحرك سيارة الشرطة

والمسافة التى قطعتها سيارة الشرطة.

١٣٠ ثانية ، ٢٤٠ متر

٣٢ الشكل المقابل يمثل منحنى (السرعة - الزمن)

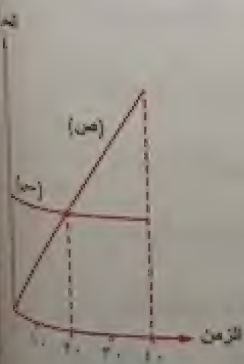
لحركة سيارتين س ، ص بدأتا الحركة من نفس

الموضع معاً وفى نفس الاتجاه أوجد :

الزمن الذى تتقابل فيه السيارتان.

(فسر إجابتك).

١٠٠ ثانية





الدرس 3

الحركة الرأسية تحت تأثير الجاذبية الأرضية (السقوط الحر)

كان المعتقد قديماً أن الأجسام الثقيلة تصل إلى سطح الأرض في حالة سقوطها من نقطة ترتفع عن سطح الأرض في زمن أقل من الذي تستغرقه الأجسام الخفيفة إذا سقطت من نفس الارتفاع ، إلى أن أثبت أحد العلماء أن جميع الأجسام ثقيلها وخفيفها تسقط نحو الأرض بنفس العجلة المنتظمة وذلك بالتجربة العملية بأن وضع جنيهاً من الذهب مع ريشة صغيرة بداخل أنبوبة أسطوانية من الزجاج مفرغة من الهواء ثم قلب الأنبوبة فوصل الجنيه والريشة إلى قاع الأنبوبة في نفس اللحظة وهذا يؤكد أن جميع الأجسام بصرف النظر عن وزنها تتحرك عند سقوطها نحو الأرض سقوطاً حراً بنفس العجلة المنتظمة.

وقد أمكن حساب عجلة الأجسام الساقطة ولوحظ أنها ثابتة المعيار عند نفس المكان ويختلف معيارها قليلاً باختلاف خط العرض فيقل عند خط الاستواء ويزداد قليلاً كلما اتجهنا نحو أحد القطبين وكذلك ينقص معيارها كلما ارتفعنا عن سطح الأرض.

وقد سميت هذه العجلة المنتظمة بعجلة التثاقل أو عجلة الجاذبية الأرضية أو عجلة السقوط الحر وهي تعمل دائماً نحو مركز الأرض ويرمز لها بالرمز « g » وسوف نعتبر معيار g أي $g = 980$ سم/ث² أو 9.8 متر/ث²، ما لم يذكر خلاف ذلك.

قوانين الحركة الرأسية للأجسام

لما كانت الأجسام المتحركة رأسياً حركة حرة تكون حركتها بعجلة منتظمة معيارها (g) فهي إذن تخضع لنفس قوانين الحركة المستقيمة ذات العجلة المنتظمة مع استخدام الرمز (g) الدال على عجلة الجاذبية الأرضية بدلاً من الرمز (a) وبذلك تأخذ القوانين السابقة الصور الآتية :

$$v = u + gt, \quad v^2 = u^2 + 2gs, \quad s = ut + \frac{1}{2}gt^2, \quad s = \frac{v^2 - u^2}{2g}$$

مع ملاحظة أن \vec{e} ، \vec{s} ، \vec{f} هي القياسات الجبرية للمتجهات \vec{e} ، \vec{s} ، \vec{f} مما ينطبق
مراعاة إشارة كل منها عند استخدام العلاقات السابقة كما يلي :

أولاً إذا كان الجسم ساقطاً أو مقذوفاً الى أسفل

نعتبر الاتجاه الموجب هو الاتجاه الرأسى إلى أسفل فتكون كل
من \vec{e} ، \vec{s} ، \vec{f} موجبة وعلى ذلك فإن :

- كلاً من \vec{e} ، \vec{f} تزداد بازدياد الزمن t مقيساً من لحظة
السقوط أو القذف إلى أسفل كما أن \vec{e} تزداد كلما زادت
 \vec{f} المقيسة من مكان السقوط أو القذف إلى أسفل.

الإزاحة \vec{f} فى أى فترة زمنية = المسافة المقطوعة خلال هذه الفترة.

إذا سقط جسم (أى يبدأ حركته من السكون) فإن : $\vec{e} = 0$.

مثال ١

سقط جسم من ارتفاع ٤٤,١ مترًا نحو سطح الأرض. فما هي سرعة الجسم بعد ثانية
واحدة من لحظة سقوطه ؟ ومتى يصل إلى سطح الأرض ؟ وما هي سرعته عندئذ ؟

الحل

نعتبر الاتجاه الموجب هو الاتجاه الرأسى إلى أسفل

$$\therefore \vec{e} = 0, \vec{s} = 9.8 \text{ م/ث}^2, \vec{f} = 44.1 \text{ مترًا}$$

$$\therefore \vec{e} = \vec{e}_0 + \vec{s}t, \quad \therefore 0 = 0 + 9.8t \Rightarrow t = 0$$

$$\therefore \vec{e} = \text{سرعة الجسم بعد ١ ثانية} = 9.8 \text{ متر/ث}$$

$$\therefore \vec{f} = \vec{e}_0t + \frac{1}{2}\vec{s}t^2, \quad \therefore 44.1 = 0 + \frac{1}{2} \times 9.8 \times t^2$$

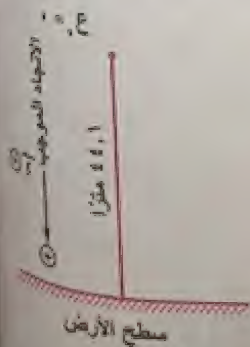
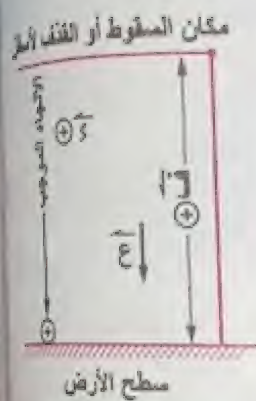
$$\therefore 9 = \frac{44.1}{4.9} = \frac{1}{2} \times 9.8 \times t^2$$

$$\therefore t = 3 \text{ ثوانٍ وهو زمن الوصول لسطح الأرض}$$

$$\therefore \vec{e} = \vec{e}_0 + \vec{s}t, \quad \therefore \vec{e} = 0 + 9.8 \times 3 = 29.4 \text{ متر/ث}$$

$$\therefore \vec{e} = \text{سرعة الجسم عند وصوله للأرض} = 29.4 \text{ متر/ث}$$

$$\therefore \vec{e} = 29.4 \text{ متر/ث}$$



مثال ٢

من قمة برج ارتفاعه ١١٢ مترًا قذف جسم رأسياً إلى أسفل بسرعة ٨,٤ متر/ث. احسب :

١ المسافة التي يقطعها الجسم في الثانية الثالثة من حركته.

٢ زمن وصول الجسم إلى سطح الأرض.

٣ السرعة التي يصل بها الجسم لسطح الأرض.

الحل

نعتبر الاتجاه الموجب هو الاتجاه الرأسى إلى أسفل

∴ $u = 8.4$ متر/ث ، $a = 9.8$ متر/ث^٢ ، $s = 112$ مترًا

١ ∴ السرعة المتوسطة للجسم خلال الثانية الثالثة

= سرعة الجسم بعد ٢,٥ ثانية من بدء الحركة

$$v = u + at \quad \therefore v = 8.4 + 9.8 \times 2.5 = 32.9 \text{ متر/ث}$$

∴ s (وهي المسافة المقطوعة في الثانية الثالثة)

$$s = ut + \frac{1}{2}at^2 = 8.4 \times 2.5 + \frac{1}{2} \times 9.8 \times (2.5)^2 = 32.9 \text{ مترًا}$$

$$\therefore s = ut + \frac{1}{2}at^2 \quad \therefore 112 = 8.4t + \frac{1}{2} \times 9.8t^2$$

$$\therefore 4.9t^2 + 8.4t - 112 = 0 \quad \therefore 4.9t^2 + 8.4t - 112 = 0$$

$$\therefore (4.9t - 16)(t + 7) = 0 \quad \therefore t = 3.2 \text{ ثوان}$$

∴ $t = 3.2$ ثوان وهي زمن وصول الجسم لسطح الأرض.

$$\therefore v = u + at \quad \therefore v = 8.4 + 9.8 \times 3.2 = 39.6 \text{ متر/ث}$$

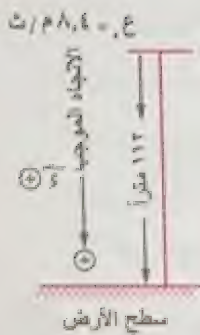
$$\therefore v = u + at \quad \therefore v = 8.4 + 9.8 \times 3.2 = 39.6 \text{ متر/ث}$$

∴ سرعة وصول الجسم لسطح الأرض = ٣٩,٦ متر/ث

$$v^2 = u^2 + 2as \quad \therefore v^2 = 8.4^2 + 2 \times 9.8 \times 112$$

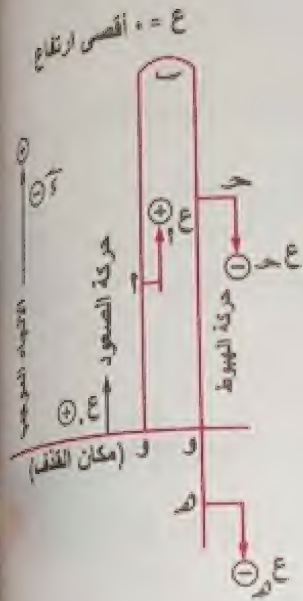
$$\therefore v^2 = 8.4^2 + 2 \times 9.8 \times 112 = 2265.76 \quad \therefore v = 47.6 \text{ متر/ث}$$

$$\therefore v = 47.6 \text{ متر/ث}$$



B612

ثانياً إذا كان الجسم مقذوفاً إلى أعلى



١ في هذه الحالة نعتبر الاتجاه الموجب هو الاتجاه الرأسى إلى أعلى فتكون : ع. موجبة ، s سالبة

٢ إذا قذف جسم من الموضع (و) رأسياً إلى أعلى فإن سرعته تتناقص حتى تصبح صفراً عند الموضع (ب) ويقال عندئذ أن الجسم قد وصل إلى أقصى ارتفاع له وهو (و) ، بعد ذلك يعود الجسم هابطاً من السكون وتصبح عجلته موجبة فتعمل على زيادة سرعته حتى يعود مرة أخرى إلى (و). وإذا لم يتوقف عند (و) فإنه يستمر فى الهبوط رأسياً إلى أسفل كما هو مبين بالشكل الموضح.

٣ • سرعة الجسم أثناء الصعود تكون موجبة وأثناء الهبوط تكون سالبة
فمثلاً : ع. موجبة بينما ع. ، ع. سالبتين.

أما السرعة عند أقصى ارتفاع فإنها تساوى صفر فمثلاً ع. = صفر

• الإزاحة (ف) تكون موجبة إذا كانت فى الاتجاه الموجب أى أعلى نقطة القذف ، وسالبة إذا كانت أسفل نقطة القذف.

فمثلاً : عندما يصل الجسم إلى الموضع أ تكون الإزاحة = و. موجبة.

وعندما يصل إلى ب (أقصى ارتفاع) تكون الإزاحة = و. موجبة.

وعندما يصل إلى ح تكون الإزاحة = و. موجبة.

وعندما يعود إلى نقطة القذف (و) تكون الإزاحة = صفراً

وعندما يهبط إلى نقطة د أسفل نقطة القذف تكون الإزاحة = و. سالبة

٤ حيث إن عجلة الجاذبية الأرضية للأجسام المقذوفة رأسياً إلى أعلى تكون سالبة فإن قوانين الحركة المستخدمة فى حركة هذه الأجسام تأخذ الصورة :

$$ع = ع. - \nu s ، \quad ف = ع. \nu - \frac{1}{2} \nu s^2 ، \quad ع^2 = ع. \nu - \frac{1}{2} \nu s^2$$

٥ الإزاحة فى فترة زمنية ما ليس بالضرورة أن تكون مساوية للمسافة التى قطعها الجسم خلال هذه الفترة.

فمثلاً : الجسم عندما يصل إلى الموضع $ح$ تكون الإزاحة $ف = و ح$
بينما المسافة المقطوعة $= و ب + ب ح$
وعندما يعود الجسم إلى نقطة القذف تكون الإزاحة $= صفرًا$
بينما المسافة المقطوعة $= و ب + ب و = ٢ و ب$

٦ لاحظ أنه عندما يقذف جسم رأسياً إلى أعلى فإنه يتحرك في الخط الرأسى المار بنقطة القذف ويعود أيضاً في نفس الخط الرأسى إلا أنه عند حل المسائل يستحسن أن نرسم خط الهبوط بجوار خط الصعود للإيضاح كما بالشكل السابق.

إيجاد زمن ومسافة أقصى ارتفاع لجسم مقذوف رأسياً إلى أعلى

$$\begin{aligned} \therefore ع = ع - و س & , \quad \therefore ع = ٠ \text{ عند أقصى ارتفاع} \\ \therefore ع = ٠ & , \quad ع - و س = ٠ \end{aligned}$$

$$\therefore و (\text{زمن الوصول لأقصى ارتفاع}) = \frac{ع}{س} = \frac{\text{مقدار سرعة القذف}}{\text{مقدار عجلة الجاذبية الأرضية}}$$

$$\begin{aligned} \therefore ع = ٢ ع - ٢ و س ف & , \quad ع = ٠ \text{ عند أقصى ارتفاع} \\ \therefore ع = ٠ & , \quad ع - ٢ و س ف = ٠ \end{aligned}$$

$$\therefore ف (\text{أقصى ارتفاع}) = \frac{ع^2}{٢ س} = \frac{\text{مربع مقدار سرعة القذف}}{\text{ضعف مقدار عجلة الجاذبية الأرضية}}$$

قاعدة

إذا قذف جسم رأسياً إلى أعلى فإن :

- ١ زمن الصعود إلى أقصى ارتفاع = زمن الهبوط إلى نقطة القذف.
- ٢ القياس الجبرى للسرعة التى يعود بها الجسم إلى نقطة القذف = - (سرعة القذف)

البرهان

عندما يعود الجسم إلى نقطة القذف تكون الإزاحة $ف = صفرًا$

$$\begin{aligned} \therefore ع = ٠ & , \quad ع - و س = ٠ \\ \therefore ع = ٠ & , \quad ع - ٢ و س ف = ٠ \end{aligned}$$

$$0 = (v_s - v_2) \cdot t = 0$$

$$0 = v_s - v_2 \Rightarrow v_s = v_2$$

$$\frac{v_2}{s} = v_s \Rightarrow \text{صفر} \Rightarrow v_s = 0$$

\therefore الزمن الذي يستغرقه الجسم حتى يعود إلى نقطة القذف $= \frac{v_2}{s}$

ولكن زمن الصعود (أي زمن الوصول إلى أقصى ارتفاع) $= \frac{v_2}{s}$

\therefore زمن الهبوط (أي زمن العودة من أقصى ارتفاع إلى مكان القذف) $= \frac{v_2}{s} - \frac{v_2}{s} = 0$

(المطلوب أولاً)

\therefore زمن الصعود = زمن الهبوط

$$v_2 = v_s \Rightarrow v_2 = v_s \Rightarrow v_2 = v_s$$

الإشارة الموجبة لسرعة القذف والإشارة السالبة للسرعة التي يعود بها جسم لنقطة القذف.

(المطلوب ثانياً)

نشاط

إذا قذفت كرة رأسياً لأعلى بسرعة ابتدائية مقدارها ١٩,٦ م/ث

فإن : حـ = -٩,٨ م/ث (الحركة لأعلى)

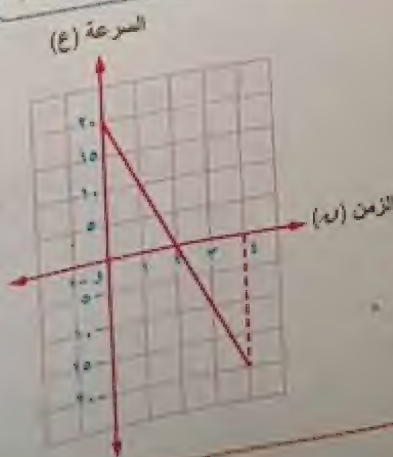
$$v_s = 19.6 - 9.8 = 9.8 \text{ م/ث} \Rightarrow v_s = 9.8 \text{ م/ث}$$

وباستخدام أى برنامج لرسم العلاقات (مسافة - زمن) ، (سرعة - زمن) ، (عجلة - زمن) في الفترة $t \in [0, 4]$ فإننا نحصل على الأشكال التالية :

منحنى (العجلة - الزمن)



منحنى (السرعة - الزمن)



منحنى (المسافة - الزمن)



قذف جسم رأسياً إلى أعلى بسرعة ٢٤,٥ متر/ث احسب أقصى ارتفاع يبلغه عن نقطة القذف والزمن الذي يستغرقه في الوصول إليه. احسب أيضاً الزمن الذي يستغرقه في العودة من نقطة أقصى ارتفاع إلى مكان القذف وماذا تكون سرعته عندئذٍ ؟

الحل

نعتبر الاتجاه الموجب هو الرأسى إلى أعلى

$$\therefore v = v_0 - g \cdot t \quad \text{ف} \quad v = 0 \quad \text{عند} \quad t = 2.5 \text{ ث}$$

$$\therefore 0 = 24.5 - 9.8 \times t \quad \text{ف} \quad t = 2.5 \text{ ث}$$

$$\therefore \text{ف (أقصى ارتفاع)} = 30.625 \text{ متراً}$$

$$\text{(يمكن إيجاد أقصى ارتفاع مباشرة من العلاقة } v = \frac{v_0}{2} \text{ ف } v = \frac{24.5}{2} = 12.25 \text{ م/ث)}$$

$$\therefore 24.5 - 9.8 \times 2.5 = 0$$

$$\therefore v = v_0 - g \cdot t \quad \text{ف} \quad v = 0 \quad \text{عند} \quad t = 2.5 \text{ ث}$$

$$\therefore \text{ف (زمن الوصول إلى أقصى ارتفاع)} = \frac{24.5}{9.8} = 2.5 \text{ ثانية}$$

$$\text{(يمكن إيجاد زمن الوصول إلى أقصى ارتفاع مباشرة من العلاقة } v = \frac{v_0}{2} \text{ ف } v = \frac{24.5}{2} = 12.25 \text{ م/ث)}$$

$$\therefore \text{ف (زمن الصعود)} = \text{زمن الهبوط}$$

$$\therefore \text{ف (زمن العودة من نقطة أقصى ارتفاع إلى مكان القذف)} = 2.5 \text{ ثانية}$$

$$\therefore \text{ف (مقدار السرعة التي يعود بها إلى مكان القذف)} = \text{مقدار سرعة القذف}$$

$$\therefore \text{ف (سرعة الجسم عند عودته إلى مكان القذف)} = 24.5 \text{ متر/ث رأسياً إلى أسفل}$$

قذف جسم رأسياً إلى أعلى بسرعة ١٩,٦ متر/ث.

احسب سرعته عندما يكون على ارتفاع ١٤,٧ متراً فوق نقطة القذف.

الحل

نعتبر الاتجاه الموجب هو الرأسى إلى أعلى

$$\therefore v = v_0 - g \cdot t \quad \text{ف} \quad v = 0 \quad \text{عند} \quad t = 2.5 \text{ ث}$$

$$\therefore 14.7 = 19.6 - 9.8 \times t \quad \text{ف} \quad t = 0.5 \text{ ث}$$

$$\therefore v = v_0 - g \cdot t \quad \text{ف} \quad v = 19.6 - 9.8 \times 0.5 = 14.7 \text{ م/ث}$$

والسرعة الموجبة هي سرعته عندما يكون على نفس الارتفاع من نقطة القذف وهو صاعد إلى أعلى.
والسرعة السالبة هي سرعته عندما يكون على نفس الارتفاع من نقطة القذف وهو هابط إلى أسفل بعد وصوله إلى أقصى ارتفاع.

ملاحظة :

من المثال السابق نلاحظ أن مقدار سرعة الجسم عند أي نقطة وهو صاعد تكون مساوية لمقدار سرعته عند مروره بنفس النقطة وهو هابط مع اختلاف اتجاهي السرعتين.

مثال ٥

قذف جسم رأسياً إلى أعلى من نقطة على سطح الأرض فعاد إلى نقطة القذف بعد ٦ ثوانٍ من لحظة قذفه. احسب السرعة التي قذف بها وكذلك أقصى ارتفاع بلغه الجسم وكذلك سرعة الجسم ٤,٥ ثانية من لحظة قذفه.

الحل

نعتبر الاتجاه الموجب هو الرأسى إلى أعلى

∴ الجسم عاد إلى موضع القذف بعد ٦ ثوانٍ من لحظة قذفه

$$\therefore \text{زمن الصعود} = \text{زمن الهبوط} = \frac{6}{2} = 3 \text{ ثوانٍ}$$

$$\therefore \text{زمن الوصول إلى أقصى ارتفاع} = \frac{6}{2} = 3 \therefore \frac{v}{9,8} = 3$$

$$\therefore v = (9,8 \times 3) = 29,4 \text{ متر/ث}$$

$$\therefore \text{مسافة أقصى ارتفاع} = \frac{v^2}{2g}$$

$$\therefore \text{أقصى ارتفاع يبلغه الجسم} = \frac{(29,4)^2}{9,8 \times 2} = 44,1 \text{ مترًا}$$

$$v = v_0 - gt$$

$$\therefore v = 29,4 - 9,8 \times 4,5 = -14,7 \text{ متر/ث}$$

$$\therefore \text{سرعة الجسم بعد ٤,٥ ثانية} = -14,7 \text{ متر/ث إلى أسفل}$$

قذف حجر صغير بسرعة ١٩,٦ م/ث رأسياً إلى أعلى من قمة برج ارتفاعه ١٥٦,٨ م عن سطح الأرض أوجد :

- ١ الزمن الذي يستغرقه الجسم من لحظة القذف حتى يصل إلى سطح الأرض.
- ٢ سرعة الجسم عند وصوله إلى سطح الأرض.

الحل

نعتبر الاتجاه الموجب هو الرأسى إلى أعلى
عندما يصل الحجر إلى سطح الأرض فإن :

$$f = -156,8 \text{ متر}$$

$$f = v \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$-156,8 = v \cdot 8 - \frac{1}{2} \cdot 9,8 \cdot 8^2$$

$$-156,8 = 8v - 313,6$$

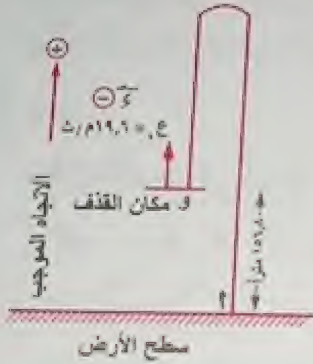
$$156,8 = 8v - 313,6$$

$$8v = 156,8 + 313,6$$

$$8v = 470,4$$

$$v = \frac{470,4}{8} = 58,8 \text{ م/ث}$$

أي أن الحجر يصل إلى سطح الأرض بسرعة مقدارها ٥٨,٨ م/ث لأسفل.



من مكان يعلو عن سطح الأرض قذف جسم رأسياً إلى أعلى بسرعة ١٩,٦ م/ث. عيّن موضع الجسم :

- ١ بعد ٣ ثوانٍ من لحظة قذفه.
- ٢ بعد ٥ ثوانٍ من لحظة قذفه.

الحل

نعتبر الاتجاه الموجب هو الرأسى إلى أعلى.

$$f = v \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$f = 19,6 \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 9,8 \cdot 3^2$$

$$f = 58,8 - 44,1$$

$$f = 14,7 \text{ متراً}$$

$$2 \quad \therefore f = c - \frac{1}{4}v^2 \quad \therefore f = 25 \times 9.8 \times \frac{1}{4} - 5 \times 19.6 = 24.5 \text{ مترًا}$$

∴ ف سالبة
∴ الجسم بعد ٥ ثوانٍ يكون أسفل نقطة القذف بمقدار ٢٤,٥ مترًا.

مثال ٨

سقط حجر من السكون من ارتفاع ١٠ أمتار فوق كومة من الرمل فغاص فيها مسافة ١٩٦ سم. أوجد العجلة التي تحرك بها داخل الرمل.

الحل

• قبل الغوص في الرمل :

$$c = 0, \quad f = 10 \text{ أمتار}, \quad s = 9.8 \text{ م/ث}^2$$

$$\therefore c^2 = 2 + c^2 \quad \therefore f = 2 + c^2$$

$$\therefore c^2 = \text{صفر} + 10 \times 9.8 \times 2 = 196$$

$$\therefore c = 14 \text{ م/ث}$$

• بعد الغوص في الرمل :

$$c = 14 \text{ م/ث}, \quad c = 0, \quad f = 1.96 \text{ متر}$$

$$\therefore c^2 = 2 + c^2 \quad \therefore f = 2 + c^2$$

$$\therefore \text{صفر} = (14)^2 + 2 \times c \times 1.96$$

$$\therefore c = \frac{(14)^2}{1.96 \times 2} = 50 \text{ م/ث}^2$$

مثال ٩

قذفت كرة صغيرة رأسياً إلى أعلى من نافذة أحد المنازل وشوهدت الكرة وهي هابطة أمام النافذة بعد ٨ ثوانٍ من قذفها ثم وصلت إلى الأرض بعد ٩ ثوانٍ من لحظة القذف. أوجد ارتفاع هذه النافذة عن سطح الأرض بالأمطار.

الحل

$$\therefore \text{زمن أقصى ارتفاع} = \frac{8}{2} = 4 \text{ ثوانٍ}$$

$$\therefore \frac{c}{s} = \frac{c}{9.8}$$

B612

∴ ف = ع - ٧.٥ = $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{4} = 9 \times 39.2 - 9 \times 9.8 \times \frac{1}{4}$ ∴ $44.1 = 9 \times 9.8 \times \frac{1}{4}$ متر
أي أن النافذة تكون على ارتفاع ٤٤,١ مترًا عن سطح الأرض.

حل آخر:

∴ زمن أقصى ارتفاع = $\frac{\Delta}{\gamma} = 4$ ثوانٍ

$$ع = ع - ٧.٥$$

$$٠ = ع - ٩.٨ \times 4$$

$$∴ ع = 39.2 \text{ م/ث}$$

∴ سرعة الكرة لحظة مرورها بنقطة القذف = ٣٩,٢ م/ث

∴ زمن العودة لنقطة القذف = زمن الوصول لأقصى ارتفاع

∴ زمن الوصول من مكان القذف عائدًا لسطح الأرض = ١ ثانية

$$∴ ف = ع - ٧.٥ = \frac{1}{4} \text{ و } \frac{1}{4} = 9 \times 39.2 - 9 \times 9.8 \times \frac{1}{4} \text{ ∴ } 44.1 = 9 \times 9.8 \times \frac{1}{4} \text{ متر}$$

أي أن ارتفاع النافذة عن سطح الأرض = ٤٤,١ متر

مثال ١٠

سقطت كرة رأسياً إلى أسفل من ارتفاع ٢,٥ مترًا نحو أرض أفقية فاصطدمت بالأرض ثم ارتدت رأسياً إلى أعلى بسرعة مقدارها يعادل $\frac{4}{9}$ مقدار سرعتها قبل الاصطدام. أوجد أقصى ارتفاع بلغته الكرة بعد اصطدامها لأول مرة بالأرض.

الحل

• في حالة الهبوط :

$$∴ ع = ع + ٢ \text{ و } ف$$

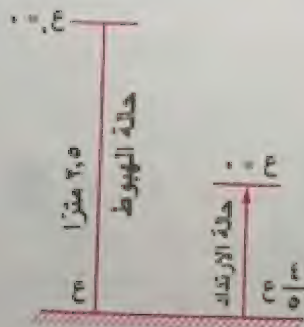
$$49 = 2.5 \times 9.8 \times 2 + ٠ =$$

∴ ع (سرعة الكرة قبل الاصطدام بالأرض مباشرة) = ٧ م/ث

• في حالة الارتداد : نعتبر الاتجاه الموجب هو الرأسى إلى أعلى

$$∴ ع = ٧ \times \frac{4}{9} = ٥.٦ \text{ م/ث}$$

$$∴ \text{أقصى ارتفاع} = \frac{ع}{٥٢} = \frac{٥.٦}{٩.٨ \times ٢} = ١.٦ \text{ مترًا}$$



مسائل على الحركة الرأسية لأسفل

أولاً

١ طفل يُسقط كرة من نافذة ترتفع $3,6$ م عن الرصيف. ما سرعتها لحظة ملامستها الرصيف ؟

٢ أسقط عامل بناء قطعة خرسانية من سقالة (منصة) عالية. ما سرعة قطعة البناء بعد نصف ثانية ؟

٣ ما المسافة التي تقطعها كتلة البناء خلال هذا الزمن ؟

٤ من نقطة على ارتفاع $78,4$ متراً عن سطح الأرض سقط جسيم رأسياً إلى أسفل. احسب:

١ سرعة الجسيم بعد 2 ثوانٍ من لحظة سقوطه.

٢ المسافة المقطوعة في الثانية الثالثة من حركته.

٣ سرعة وصول الجسيم إلى سطح الأرض.

٤ زمن وصول الجسيم لسطح الأرض.

١.٩٠ م/ث ، ٢٨.٢ م/ث ، ٢٩.٤ م/ث ، ٢٥.٥ م/ث

٥ قذف جسم رأسياً إلى أسفل بسرعة $20,6$ م/ث من قمة برج ارتفاعه $105,9$ متراً. احسب:

١ زمن وصول الجسم لسطح الأرض.

٢ السرعة التي يصل بها لسطح الأرض.

٣ المسافة التي يقطعها الجسم في الثانية الأخيرة من سقوطه.

٣ ثوانٍ ، ٥٠ م/ث ، ١٥,١ م/ث

٦ قذف حجر في بئر فارغ بسرعة 4 م/ث رأسياً لأسفل فوصل إلى قاع البئر بعد 2 ثانية. أوجد:

١ عمق البئر.

٢ سرعة الحجر عند تصادمه بقاع البئر.

٢٧.٦ م ، ٣٢ م/ث ، ٣٢ م/ث

٧ قذف جسم رأسياً إلى أسفل بسرعة 32 م/ث فوصل الأرض بعد 4 ثوانٍ من لحظة القذف. احسب الارتفاع الذي قذف منه الجسم والسرعة التي وصل بها للأرض.

٢٠ م ، ٢٠ م/ث ، ٢٠ م/ث

٧ سقط جسم من قمة برج فقطع في الثانية الأخيرة من سقوطه مسافة ١٩,٦ مترًا احسب ارتفاع البرج.

«٣٠.٥ مترًا»

٨ سقط جسيم من قمة برج ارتفاعه ٣٢,٤ مترًا ، أوجد سرعته عندما يكون على ارتفاع ٩,٩ مترًا من سطح الأرض ، وكذلك سرعته في لحظة منتصف الزمن الذي يستغرقه في الوصول للأرض.

«٢١ متر/ث ، ١٢.٦ متر/ث»

٩ قذف جسيم رأسياً إلى أسفل فقطع مسافة ٥٠ مترًا في الثانية الثالثة من لحظة سقوطه وقطع مسافة ١٣٠ مترًا في الثانية الرابعة والخامسة.

احسب السرعة التي قذف بها وعجلة الجاذبية في هذا المكان. «٢٥٠ متر/ث ، ١٠ متر/ث»

١٠ قذف جسيم رأسياً إلى أسفل من قمة برج ارتفاعه ٢٤٠ مترًا عن سطح الأرض فقطع مسافة ١٥,٥ مترًا خلال الثانية الأولى من سقوطه.

احسب الزمن الذي يستغرقه في الوصول إلى الأرض والسرعة التي يصل بها للأرض.

«٦ ثوان ، ٦٩.٤ متر/ث»

ثانياً مسائل على الحركة الرأسية لأعلى

١ قذف جسيم رأسياً إلى أعلى بسرعة ٤٩ م/ث.

أوجد زمن وصوله إلى أقصى ارتفاع والمسافة التي وصل إليها. «٥ ثوان ، ١٢٢,٥ متر»

٢ قذفت كرة رأسياً إلى أعلى بسرعة ١٩,٦ م/ث.

أوجد أقصى ارتفاع تصل إليه وكذلك الزمن الذي تستغرقه حتى تعود إلى مكان القذف.

«١٩,٦ مترًا ، ٤ ثوان»

٣ قذف جسيم رأسياً إلى أعلى من نقطة على سطح الأرض. فإذا كان أقصى ارتفاع يمكن أن يصل إليه الجسيم هو ٤٤,١ مترًا. فأوجد :

① السرعة التي قذف بها الجسيم.

② الزمن الذي يمضي من لحظة قذفه حتى يعود إلى سطح الأرض. «٢٩.٤ م/ث ، ٦ ثوان»

- ٤ قذف جسيم رأسياً إلى أعلى بسرعة 39.2 متر/ث أوجد :
- ١ الزمن الذي يستغرقه من لحظة قذفه حتى يعود إلى مكان القذف.
 - ٢ الزمن الذي يمضي حتى يصبح الجسيم على ارتفاع 34.3 متراً من نقطة القذف.
- فسّر معنى الجوابين.

- ٥ قذف جسيم رأسياً لأعلى من نقطة على سطح الأرض فعاد إليها بعد 10 ثوانٍ من لحظة القذف. أوجد :
- ١ السرعة الابتدائية.
 - ٢ أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم.

٤٩ م/ث ، 122.0 متر.

- ٦ قذف حجر رأسياً إلى أعلى من قمة برج بسرعة 14.7 متر/ث فوصل إلى سطح الأرض بعد 5 ثوانٍ من لحظة قذفه. أوجد ارتفاع البرج عن سطح الأرض والسرعة التي يصل بها الحجر إلى الأرض وأوجد أيضاً الزمن الذي يمضي من لحظة القذف حتى يصبح على بُعد 29.4 متراً من سطح الأرض.

- ٧ قذف جسيم من قمة برج رأسياً إلى أعلى بسرعة مقدارها 24.0 م/ث فوصل إلى سطح الأرض بعد 8 ثوانٍ أوجد :

- ١ ارتفاع البرج.
- ٢ أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم عن سطح الأرض.
- ٣ المسافة التي يقطعها الجسم خلال هذه المدة.

- ٨ من قمة برج ارتفاع 9.8 متراً قذف جسيم رأسياً لأعلى بسرعة 4.9 م/ث أوجد :

- ١ أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم من نقطة القذف.
- ٢ الزمن الذي يستغرقه الجسم وهو هابط حتى تصبح سرعته 11.2 م/ث
- ٣ زمن وصول الجسم إلى نقطة القذف.
- ٤ زمن وصول الجسم إلى سطح الأرض.
- ٥ سرعة الجسيم لحظة وصوله إلى سطح الأرض.

1.2250 متر ، $\frac{1}{4}$ ثانية ، 1 ثانية ، 2 ثانية ، 14.7 م/ث

٩ قذف جسيم رأسياً إلى أعلى من مكان يرتفع عن سطح الأرض بمقدار ١٤٠ متراً فوجد أنه قطع في الثانية الثالثة وهو صاعداً مسافة ١٠٠,٥ متراً. أوجد :

- ١) السرعة التي قذف بها الجسيم.
- ٢) أقصى ارتفاع يصل إليه الجسيم عن سطح الأرض.
- ٣) الزمن الذي يستغرقه للوصول إلى سطح الأرض.

« ٢٥ م/ث ، ٢٠٢,٥ متراً ، ١٠ ثوانٍ »

١٠ قذف جسيم رأسياً إلى أعلى بسرعة ١٩,٦ م/ث من نقطة تعلو سطح الأرض بمقدار ٢٢٠,٤ متراً. أوجد :

- ١) أقصى ارتفاع عن سطح الأرض يصله الجسيم.
- ٢) موضع الجسيم بالنسبة لنقطة القذف بعد ٥ ثوانٍ من لحظة قذفه.
- ٣) أقصى سرعة يكتسبها الجسيم.

« ٢٥٠ م ، ٢٤,٥ م/ث لأسفل ، ٧٠ م/ث »

١١ قذف جسم رأسياً إلى أعلى بسرعة ١٤ م/ث من نقطة على ارتفاع ٢٥٠ متراً من سطح الأرض. أوجد :

- ١) الزمن الذي يأخذه الجسم حتى يصل إلى سطح الأرض.
- ٢) المسافة الكلية التي قطعها الجسم حتى وصوله لسطح الأرض.

« ١٠ ثوانٍ ، ٣٧٠ م »

١٢ قذف جسيم رأسياً إلى أعلى بسرعة ٢٤ م/ث.

أوجد الزمن الذي يستغرقه حتى يصل إلى موضع أسفل نقطة القذف بمقدار ٣٢,٤ متراً وكم تكون سرعته عندئذٍ ؟

« ٦ ثوانٍ ، ٢٤,٨ م/ث إلى أسفل »

١٣ قذفت كرة رأسياً لأعلى من قمة برج رأسى بسرعة ٢٤,٥ م/ث. أوجد :

- ١) متى تصل الكرة إلى ارتفاع ٢٩,٤ متر فوق موضع قذفها.
- ٢) متى تصل الكرة إلى بُعد ٢٩,٤ متر تحت موضع قذفها.

« ٢, ٣ ثانية ، ٦ ثانية »

١٤ قذف جسيم رأسياً إلى أعلى بسرعة ٢٤,٥ م/ث

عين موضع الجسيم واتجاه حركته بعد ٢ ثانية من لحظة قذفه إذا كانت له تساوى :

- ١) ٢ ثانية.
- ٢) ٤ ثوانٍ.
- ٣) ٥ ثوانٍ.
- ٤) ٦ ثوانٍ.

١٥ قذف حجر رأسياً إلى أعلى بسرعة ١٩.٦ متر/ث من نقطة على سطح الأرض أسفل منزل ارتفاعه ١٤.٧ متراً. احسب الزمن الذي يستغرقه الحجر حتى يهبط عند سطح المنزل وكم تكون سرعته حينئذ؟
٣. ثوانٍ ٩.٨٤ متر/ث.

١٦ قذف جسم رأسياً لأعلى بسرعة ٢٨ م/ث من سطح الأرض فسقط على سطح منزل بعد ٤ ثوانٍ من لحظة القذف. أوجد ارتفاع المنزل وأقصى ارتفاع يصل إليه الجسم.
٢٣.٦٠ مترًا ١٠.٤ مترًا.

ثالثاً مسائل متنوعة

١ أكمل كلاً مما يأتي بوضع الرمز المناسب (ع. ، ع ، ف ، س ، ن) :

١) إذا سقط جسم رأسياً لأسفل فإن : = صفر

٢) إذا وصل جسم إلى أقصى ارتفاع فإن : = صفر

٣) إذا عاد الجسم إلى نقطة القذف فإن : = صفر

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١) إذا قذف جسم رأسياً إلى أعلى بسرعة (ع.) م/ث إلى أقصى ارتفاع (ف) متر فإن زمن الوصول لأقصى ارتفاع (ن) يساوي ثانية.

(١) $\frac{ع}{س٢}$ (ب) $\frac{ع}{س}$ (ج) $\frac{ع}{س٢}$ (د) $\frac{ع٢}{س}$

٢) قذف جسم رأسياً إلى أعلى بسرعة ٢٤.٥ م/ث فإنه يعود إلى نقطة القذف بعد ثانية.

(١) ٢.٥ (ب) ٥ (ج) ١٠ (د) صفر

٣) إذا قذف جسم رأسياً إلى أعلى من سطح الأرض فعاد إلى نقطة القذف بعد ١٢ ثانية فإن زمن الهبوط = ثانية.

(١) صفر (ب) ٣ (ج) ٦ (د) ١٢

٤) إذا قذف جسم رأسياً إلى أعلى من نقطة على سطح الأرض فعاد إليها بعد ١٠ ثوانٍ فإن أقصى ارتفاع يصل إليه = متر.

(١) ١٢٢.٥ (ب) ٢٤٥ (ج) ٤٩ (د) ٤٩٠

٥ إذا سقط جسم من ارتفاع ١٠ أمتار على أرض أفقية فإن سرعته لحظة اصطدامه بالأرض بوحدة م/ث هي

(أ) صفر (ب) ٢٠

(ج) ١٤

(د) ١٩٦

٦ قذف جسم رأسياً لأعلى بسرعة ٤٢ م/ث فإن أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم يساوي

(أ) ٦٥ (ب) ٩٨

(ج) ٨٤

(د) ٩٠

٧ إذا سقط جسم من ارتفاع ١٩,٦ متر على أرض رملية فغاص فيها ١٤ سم حتى سكن فأوجد عجلة حركة الجسم داخل الرمل بوحدة م/ث^٢

(أ) ١٣٧٢- (ب) ٩,٨-

(ج) ١٩,٦

(د) ١٧٣٢

٨ إذا كان حيوان الكانجرو يستطيع أن يقفز إلى ارتفاع ٢,٥ متر فإن السرعة التي يقفز بها الكانجرو ليصل لهذا الارتفاع = م/ث

(أ) ٥,٨ (ب) ٦,٤

(ج) ٧

(د) ٧,٢

٩ قذف جسم رأسياً لأعلى من نقطة على سطح الأرض فقطع مسافة ١٦ متر خلال نه ثانية الأولى وهو صاعد فإن المسافة التي يقطعها خلال نه ثانية الأخيرة وهو هابط تساوي

(أ) ٢ (ب) ٤

(ج) ٨

(د) ١٦

١٠ قذف جسم رأسياً لأسفل بسرعة ٢٠ م/ث من طائرة تتحرك لأعلى بسرعة ١٨٠ كم/س فإن السرعة الابتدائية للجسم هي

(أ) ١٦٠ م/ث لأسفل.

(ب) ٣٠ م/ث لأعلى.

(ج) ٧٠ م/ث لأعلى.

(د) ٣٠ م/ث لأسفل.

١١ سقطت كرة ملساء من يد رجل يقف داخل مصعد كهربائي يتحرك رأسياً لأسفل بسرعة منتظمة ٥٠ سم/ث فإن سرعة الكرة بعد $\frac{1}{4}$ ثانية هي

(أ) ٥٠ سم/ث (ب) ٢٥ سم/ث (ج) ٥٤,٩ سم/ث (د) ٥٠,٤ سم/ث

١٢ إذا سقط جسم فإن المسافات التي يقطعها هذا الجسم خلال الثلاث ثواني الأولى هي على الترتيب

(أ) ٩,٨ متر ، ٩,٨ متر ، ٩,٨ متر (ب) ٤,٩ متر ، ١٤,٧ متر ، ٢٤,٥ متر

(ج) ٢٤,٥ متر ، ١٤,٧ متر ، ٤,٩ متر (د) ٩,٨ متر ، ١٩,٦ متر ، ٢٩,٤ متر

١٣) قذف جسم رأسياً لأعلى بسرعة ابتدائية 4.9 م/ث فإن الفترة الزمنية التي يكون عندها ارتفاع الجسم عن الأرض أكبر من ارتفاع المبنى هي

(أ) من $t = 0$ ثانية إلى $t = 8$ ثانية. (ب) من $t = 0$ = صفر إلى $t = 8$ ثانية.

(ج) من $t = 0$ = صفر إلى $t = 8$ ثانية. (د) من $t = 2$ إلى $t = 8$ ثانية.

٣) من أعلى تل ارتفاعه 9.8 متراً قذف جسم رأسياً إلى أعلى بسرعة 4.9 م/ث أوجد:

١) سرعة الجسم عند لحظة وصوله إلى أسفل التل.

14.7 م/ث ، 2 ثانية

٢) الزمن الذي استغرقه للوصول إلى أسفل التل.

٤) قذفت كرة رأسياً إلى أعلى من نافذة فوصلت إليها بعد 4 ثوانٍ من لحظة القذف

ووصلت إلى سطح الأرض بعد 5 ثوانٍ من لحظة القذف. أوجد :

١) سرعة قذف الكرة.

٢) أقصى ارتفاع وصلت إليه الكرة من نقطة القذف.

٣) ارتفاع النافذة من سطح الأرض.

19.6 م/ث ، 19.6 متر ، 24.5 متر

٥) من قمة برج قذف جسيم رأسياً إلى أعلى وشوهد أمام نقطة القذف وهو هابط بعد 4 ثوانٍ من لحظة قذفه ووصل إلى سطح الأرض بعد 3 ثوانٍ أخرى.

أوجد ارتفاع البرج وكذلك أقصى ارتفاع للجسيم عن سطح الأرض.

$10.2, 9.0$ متراً ، 122.5 متراً

٦) يتدرب طالب على ركل كرة القدم رأسياً إلى أعلى في الهواء ، ثم تعود الكرة أثر

كل ركلة فتصطدم بقدمه ، فإذا استغرقت الكرة من لحظة ركلها وحتى اصطدامها بقدمه 0.2 ثانية. أوجد :

١) السرعة الابتدائية.

٢) الارتفاع الذي وصلت إليه الكرة بعد أن ركلها الطالب.

1.47 م/ث ، 11.25 متراً

٧ سقط جسم من ارتفاع ف عن سطح الأرض فقطع في الثانية الأخيرة من حركته ٢٤.٣ مترًا. أوجد :

١ سرعة وصول الجسم إلى سطح الأرض.

٢ الارتفاع الذي سقط منه الجسم.

٢٩.٢ م/ث ، ٧٨.٤ م/ث

٨ سقط جسم من ارتفاع ف مترًا فقطع في الثانية الأخيرة $\frac{9}{25}$ ف مترًا. أوجد :

١ الارتفاع الذي سقط منه.

٢ سرعة الجسم لحظة الوصول لسطح الأرض.

١٢٢.٥ م/ث ، ٤٩ م/ث

٩ سقط جسم رأسياً إلى أسفل من ارتفاع ما نحو أرض رخوة فغاص فيها مسافة

١٤ سم قبل أن يسكن فإذا كان الجسم يتحرك داخل الأرض بتقصير منتظم مقداره

٦٣ م/ث^٢. فما هو الارتفاع الذي سقط منه الجسم.

٠.٩ متر

١٠ سقط جسم من ارتفاع ٢٢.٥ مترًا على أرض رملية فغاص فيها مسافة ٢٥ سم. احسب كلاً من :

١ سرعة الجسم عند سطح الأرض.

٢ العجلة التي تحرك بها الجسم داخل الأرض الرملية.

٢١ م/ث ، ٨٨٢ م/ث^٢

١١ سقط جسم من ارتفاع ٦.٤ مترًا عن سطح أرض رملية فغاص في الرمل مسافة ٣٢ سم. أوجد :

١ العجلة المنتظمة التي تحرك بها الجسم داخل الرمل.

٢ الزمن الذي استغرقه من لحظة سقوطه حتى سكن في الرمل.

١٩٦ م/ث^٢ ، ١.٣ ثانية

١٢ سقطت كرة من المطاط من ارتفاع ١٠ أمتار ، فاصطدمت بالأرض وارتدت رأسياً

إلى أعلى مسافة $2\frac{1}{4}$ متر.

احسب سرعة الكرة قبل وبعد اصطدامها بالأرض مباشرة.

١٤ م/ث ، ٧ م/ث

١٣ سقطت كرة من ارتفاع ٩٠ متر عن سطح الأرض وعند وصولها للأرض ارتدت

ثانية إلى أعلى بسرعة تساوى نصف سرعة وصولها إلى الأرض.

٢٢.٥ متر

أوجد أقصى ارتفاع تصل إليه الكرة.

١٤ من قمة برج يعلو ١٩٦ مترًا عن سطح الأرض قذف جسم . فما هو الزمن الذي يستغرقه كل أحدهما رأسياً إلى أسفل والآخر رأسياً إلى أعلى . فمما هو الزمن الذي يستغرقه كل منهما في الوصول إلى سطح الأرض ؟

١٥ سقط جسم من ارتفاع ٤٠ مترًا عن سطح الأرض وفي نفس اللحظة ومن سطح الأرض قذف جسم آخر رأسياً لأعلى بسرعة ٢٠ م/ث فتقابل الجسمان بعد فترة زمنية t . أوجد :

١ الفترة الزمنية t .
٢ المسافة التي قطعها كل منهما .

١٦ سقط جسم من ارتفاع ٦٠ مترًا من سطح الأرض ، وفي نفس اللحظة قذف جسم آخر رأسياً لأعلى من سطح الأرض بسرعة ٢٠ م/ث فتقابل الجسمان بعد فترة زمنية . أوجد هذا الزمن ، ثم أوجد المسافة التي قطعها كل من الجسمين خلال هذه الفترة الزمنية ، ثم انكر هل الجسمان لحظة التقابل متحركان في اتجاهين متضادين أم في نفس الاتجاه .

٢٠ ثوان ، ٤٤.٦ متر ، ٤٤.٩ م/ث ، ٢٤ م/ث ، في نفس الاتجاه .

١٧ جسم ساكن على ارتفاع ٦.١٢٥ متر من سطح الأرض مربوط بخيط يشد الجسم رأسياً إلى أعلى بعجلة ٢.٤٥ م/ث^٢ وبعد ثنيتين من بدء الحركة قطع الخيط . أوجد :

١ سرعة الجسم قبل قطع الخيط مباشرة .
٢ أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم عن سطح الأرض .
٣ سرعة الجسم عند وصوله سطح الأرض .

٤.٩ م/ث ، ١٦.٢٥ م/ث ، ٤.٩ م/ث ، ١٠.٢ م/ث .

١٨ قذف جسيم رأسياً إلى أعلى بسرعة ٤٠ متر/ث من نقطة على سطح الأرض وبعد ثانية قذف جسيم آخر من نفس النقطة وب نفس السرعة الابتدائية للجسيم الأول . بعد كم ثانية وعلى أي ارتفاع يتلاقى الجسيমান (اعتبر عجلة الجاذبية الأرضية $g = ١٠$ متر/ث^٢) ؟

٤.٥٠ ثانية ، ٧٨.٧٥ متر .

١٩ منطلق يتحرك رأسياً بسرعة ١٤.٧ متر/ث سقط منه جسيم فوصل سطح الأرض بعد ٤ ثوان من لحظة سقوطه . احسب ارتفاع المنطلق عن سطح الأرض لحظة سقوط الجسيم منه في كل من الحالتين الآتيتين :

١ المنطلق يتحرك رأسياً إلى أسفل .
٢ المنطلق يتحرك رأسياً إلى أعلى .

١٣٧.٢٠ متر ، ١٩.٦ متر .

٢٠ يرتفع منطاد رأسياً إلى أعلى بسرعة منتظمة مقدارها ٢٤,٥ م/ث وعندما وصل إلى ارتفاع ٢٤٥ متراً من سطح الأرض سقط منه جسيم أوجد :

- ١ أقصى ارتفاع يصل إليه هذا الجسيم بالنسبة لسطح الأرض.
- ٢ السرعة التي يصل بها الجسيم للأرض.
- ٣ الزمن الذي يستغرقه في الوصول للأرض.

٤ ارتفاع المنطاد عن سطح الأرض لحظة وصول الجسيم لسطح الأرض.

$$g = 10 \text{ م/ث}^2 \quad \text{أو} \quad 9.8 \text{ م/ث}^2 \quad \text{أو} \quad 10 \text{ م/ث}^2$$

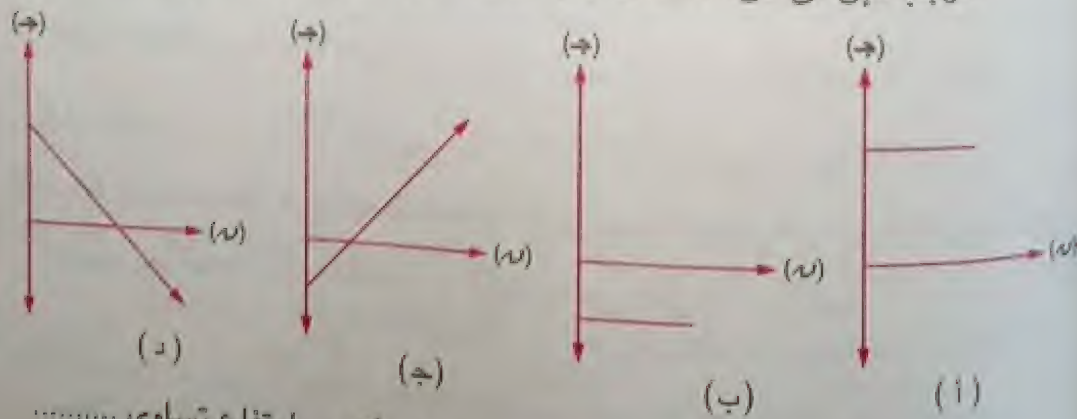
٢١ منطاد يصعد رأسياً إلى أعلى بسرعة منتظمة ٢٨ متر/ث قذف منه حجر رأسياً إلى أسفل بسرعة ١٢,٥ متر/ث فوصل إلى الأرض بعد ٥ ثوانٍ من لحظة قذفه. أوجد :

- ١ ارتفاع المنطاد عن سطح الأرض لحظة وصول الحجر لها.
- ٢ مقدار واتجاه سرعة الحجر بعد ٤ ثوانٍ من لحظة قذفه. ١٨٥ م/ث ٢٣,٧ م/ث لأسفل.

مسائل تقبّل مستويات عليا من التفكير

٢٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

- ١ ولد يقف أعلى كوبرى يرمى حجر بيده لأسفل وباعتبار الاتجاه لأعلى هو الاتجاه الموجب فإن أى من الأشكال الآتية تمثل العلاقة بين العجلة والزمن ؟



٢ قذف جسم رأسياً لأعلى فإن عجلة الجسم عند أقصى ارتفاع تساوى

- (أ) صفر
- (ب) ٩,٨ م/ث^٢ لأسفل.
- (ج) ٩,٨ م/ث^٢ لأعلى.
- (د) تعتمد على سرعة القذف.

٢٢ جسمان كتليهما ١٠ كجم ، ٢٠ كجم وقعا من نفس الارتفاع وبإهمال مقاومة الهواء
إذا كانت الكتلة ٢٠ كجم تأخذ زمن (٧) حتى تصل إلى الأرض فإن الزمن الذي
تأخذه الكتلة ١٠ كجم حتى تصل للأرض =

- (١) ٧ (ب) ٢ (ج) $\frac{1}{2}$ (د) $\frac{1}{4}$

٢٣ تم قذف كرتان بنفس السرعة الابتدائية من أعلى منزل إحداهما لأعلى والأخرى
لأسفل. قارن بين سرعتي الكرتان قبل الوصول للأرض مباشرة.

- (أ) الكرة التي قذفت لأعلى تتحرك أسرع لأن سرعتها الابتدائية لأعلى.
(ب) الكرة التي قذفت لأسفل تتحرك أسرع لأن سرعتها الابتدائية لأسفل.
(ج) لهما نفس السرعة.

(د) الكرة التي قذفت لأعلى تتحرك أسرع لأن عجلتها أكبر.

٢٤ سقط جسم (٢) من قمة مبنى ثم بعد ١ ثانية سقط جسم آخر (ب) من نفس المبنى
بإهمال مقاومة الهواء فإن الفرق بين سرعتيهما مع تقدم الزمن

- (أ) يزداد.
(ب) يقل.
(ج) يظل ثابت.
(د) لا يمكن تحديدها.

٢٥ قذف جسم رأسياً لأعلى بسرعة ٢٤,٥ م/ث فإن المسافة المقطوعة في
الثانية الثالثة = متر.

- (أ) صفر (ب) ٤,٩ (ج) ٢,٤٥ (د) ٢٤,٥

٢٦ سقط جسم من قمة برج فوصل لسطح الأرض بعد ٨ ثواني فإن الزمن الذي يستغرقه
الجسم منذ لحظة سقوطه لقطع $\frac{1}{4}$ ارتفاع البرج هو ثانية.

- (١) ٢ (ب) ٣ (ج) ٤ (د) ٥

٢٧ سقط جسمان من ارتفاعان ٣ ف على الترتيب فإن النسبة بين سرعتيهما عند
وصولهما للأرض هي

- (١) ٣ : ١ (ب) $\sqrt{3} : 1$ (ج) ٩ : ١ (د) ١ : ٣

٢٣ قذف

بدأ ال

هل يص

٩) إذا وقعت بيضة من عش عصفور في شجرة ارتفاعه ٢.٥ متر وتوجد بنت تبعد عن قاعدة الشجرة ١٣ متر فتحركت البنت بسرعة منتظمة حتى تصل وتلتحق بالبيضة قبل أن تصل للأرض بالكاد فإن سرعة البنت اللازمة لذلك هي م/ث

- (أ) ١.٣٣ (ب) ٣.٧٥ (ج) ٩.٨٣ (د) ١٨.٢

١٠) يتدرب لاعب الجمباز بالقفز لأعلى مرتين في المرة الأولى كانت السرعة الابتدائية (ع.) وفي المرة الثانية زادت سرعته الابتدائية حتى أصبحت (٤ ع.) فإن :

أقصى ارتفاع يصل إليه في المحاولة الثانية
أقصى ارتفاع يصل إليه في المحاولة الأولى =

- (أ) ٢ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

١١) يهبط أحد جنود المظلات رأسياً لأسفل بسرعة منتظمة وعندما كان على ارتفاع (ف) متر من سطح الأرض سقط منه عملة معدنية فإذا كانت سرعة الرجل عند وصوله

سطح الأرض هي (١ ع.) وزمن وصول الرجل للأرض منذ لحظة سقوط العملة هو

(٢ ص) وسرعة العملة المعدنية عند وصولها سطح الأرض هي (٣ ع.) وزمن وصول

العملة المعدنية للأرض هي ٣ ص فإن :

أولاً : العلاقة بين ١ ع ، ٣ ع هي

- (أ) ١ ع = ٣ ع (ب) ١ ع < ٣ ع (ج) ١ ع > ٣ ع (د) ١ ع = ٣ ع

ثانياً : العلاقة بين ١ ص ، ٣ ص هي

- (أ) ١ ص = ٣ ص (ب) ١ ص < ٣ ص (ج) ١ ص > ٣ ص (د) ١ ص = ٣ ص

٢٢) قذف حجر رأسياً إلى أعلى بسرعة ٣٤.٣ متر/ث من مقدمة قطار طوله ٦٠ متراً وقتما

بدأ القطار يتحرك من السكون في خط مستقيم بعجلة منتظمة ٢ متر/ث^٢

هل يصيب الحجر القطار عندما يعود إلى مكان القذف ؟ وعلى أي بُعد من مؤخرة القطار ؟
نعم ، ١١ متراً



قانون الجذب العام

4

الدرس

علمنا أن أى جسم يسقط لأسفل أو يتم قذفة لأسفل أو لأعلى فإنه يتحرك بعجلة تسمى بعجلة الجاذبية الأرضية ولكن ما سبب وجود هذه الجاذبية ولماذا تختلف من مكان لآخر فتقل كلما اقتربنا من خط الاستواء وتزداد كلما اقتربنا من أحد القطبين. وهل الجاذبية هذه خاصة بالكرة الأرضية فقط أم موجوده فى باقى الأجرام السماوية وهل الكرة الأرضية نفسها تقع تحت تأثير جاذبية أجرام سماوية أخرى ... وهكذا.

كل هذه الأسئلة يجيب عنها قانون الجذب العام لنيوتن والذي نشره فى بحثه الرياضى «مبادئ الفلسفة الطبيعية» والذي نص على :

كل الأجسام فى الكون تتجاذب مع الأجسام الأخرى بتأثير قوة متبادلة مباشرة تتناسب طردياً مع كل من كتلتى الجسمين وعكسياً مع مربع المسافة بين مركزيهما.

أي أن $F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$ ومنها $G = \frac{F r^2}{m_1 m_2}$

حيث :

- F : قوة الجذب المتبادلة بين الجسمين بالنيوتن.
- m_1, m_2 : كتلتا الجسمين بالكجم
- r : المسافة بين مركزي الجسمين بالمتر.
- G : ثابت الجذب العام.

ويعرف أيضاً قانون الجذب العام بقانون التربيع العكسى.

تعريف : ثابت الجذب العام

هو قوة الجذب المتبادلة بين كتلتين مقدار كل منهما ١ كيلوجرام والمسافة بين مركزيهما ١ متر ويساوى تقريباً $6,67 \times 10^{-11}$ نيوتن.م^٢/كجم^٢

مثال ١

كرتان كتلة الأولى ١٠ كجم والثانية ٥ كجم وضعا بحيث كانت المسافة بين مركزيهما ٠.٥ متر احسب قوة التجاذب بينهما علماً بأن ثابت الجذب العام $= 6,67 \times 10^{-11}$ نيوتن.م^٢/كجم^٢

الحل

$$F = \frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

∴ قوة الجذب بين الكرتين $= 6,67 \times 10^{-11} \times \frac{10 \times 5}{(0,5)^2} = 1,334 \times 10^{-10}$ نيوتن.
وهي قوة صغيرة جداً.

ملاحظات :

- ١ عندما تسقط تفاحة مثلاً على الأرض فإن قوة التجاذب بين التفاحة والأرض هي قوة متبادلة حيث أن الأرض تجذب التفاحة والتفاحة بدورها تجذب الأرض.
- ٢ تقل قوة الجذب بين كتلتين كلما زادت المسافة بين مركزيهما.
- ٣ تزداد قوة الجذب بين كتلتين كلما قلت المسافة بين مركزيهما.
- ٤ كل الأجسام حولنا والتي تبدو ساكنة بالنسبة لبعضها البعض يوجد بينها قوى تجاذب متبادلة ولكنها صغيرة بدرجة لا تقوى على تحريك هذه الأجسام.
- ٥ قوة جذب الأرض لجسم كتلته (ك) كجم = وزن الجسم = ك × ٩

مثال ٢

احسب قوة التجاذب المتبادلة بين كل من الشمس وكوكب المشترى بفرض أن كتلة الشمس 2×10^{30} كجم وكتلة المشترى $1,89 \times 10^{27}$ كجم والمسافة بين مركزيهما $7,73 \times 10^{11}$ متر علماً بأن ثابت الجذب العام $= 6,67 \times 10^{-11}$ نيوتن.م^٢/كجم^٢

الحل

$$F = \frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

$$\therefore \text{قوة التجاذب المتبادلة} = 6,67 \times 10^{-11} \times \frac{2 \times 10^{30} \times 1,89 \times 10^{27}}{(7,73 \times 10^{11})^2}$$

$$\approx 4,22 \times 10^{23} \text{ نيوتن.}$$

مثال ٣

قمر صناعي كتلته ١٥٠٠ كجم يدور على ارتفاع ٥٤٠ كم من سطح الأرض التي كتلتها 6×10^{24} كجم ونصف قطرها ٦٣٦٠ كم. أوجد قوة جذب الأرض للقمر بالنيوتن علمًا بأن ثابت الجذب العام يساوي 6.67×10^{-11} نيوتن. م^٢/كجم^٢

الحل

$$f = 6360 + 540 = 6900 \text{ كم} = 6900000 \text{ متر}$$

$$G = \frac{F}{\frac{m_1 m_2}{r^2}} \therefore F = \frac{G m_1 m_2}{r^2}$$

$$\therefore \text{قوة جذب الأرض للقمر} = 6.67 \times 10^{-11} \times 6 \times 10^{24}$$

$$= \frac{6.67 \times 10^{-11} \times 6 \times 10^{24}}{(6900000)^2} = 1.26 \times 10^{-4} \text{ نيوتن}$$

لنلاحظ أن

تم إهمال نصف قطر القمر الصناعي لصغره جدًا بالنسبة لنصف قطر الأرض

مثال ٤

إذا كانت قوة جذب الأرض للقمر هي 3.11×10^{22} نيوتن وكانت كتلة الأرض 6×10^{24} كجم وكتلة القمر 7×10^{22} كجم فأوجد المسافة بين مركزيهما إذا كان ثابت الجذب العام 6.67×10^{-11} نيوتن. متر^٢/كجم^٢

الحل

$$\therefore G = \frac{F}{\frac{m_1 m_2}{r^2}} \therefore r^2 = \frac{F}{G \frac{m_1 m_2}{r^2}}$$

$$\therefore r^2 = \frac{3.11 \times 10^{22}}{6.67 \times 10^{-11} \times 6 \times 10^{24} \times 7 \times 10^{22}} \therefore r = 3.84 \times 10^8 \text{ متر}$$

معلومة إثرائية

إذا كان هناك قوى تجاذب هائلة بين الأجرام السماوية وبعضها البعض كالأرض والقمر والأرض والشمس ... وهكذا، فلماذا لا يقترب القمر من الأرض إلى أن يصطدم بها ويرجع ذلك لسبب أن الأرض مثلًا تدور حول الشمس في مسار شبه دائري بسرعة تكسبها ما يسمى بقوة الطرد المركزية وهذه القوة تتوازن مع قوة الجذب مما يحافظ على وجود كل جرم سماوي في مداره.

احسب كتلة الأرض بالكجم إذا علمت أن طول نصف قطرها 6360 كم وبأن ثابت الجذب العام 6.67×10^{-11} نيوتن.م²/كجم² ، وعجلة الجاذبية الأرضية $g = 9.8$ م/ث²

الحل

بفرض أن جسمًا كتلته m_1 موضوع على سطح الأرض وليكن كتلتها M ،
∴ وزن الجسم هو قوة جذب الأرض للجسم

$$\therefore F = \frac{G m_1 M}{r^2} \quad \text{ث} \times \frac{m_1}{F}$$

$$\therefore 9.8 = \frac{6.67 \times 10^{-11} \times M}{(6360000)^2}$$

$$\therefore M = (كتلة الأرض) = 6 \times 10^{24} \text{ كجم}$$

احسب طول نصف قطر الأرض بفرض أن جسمًا كتلته 1 كجم وضع فوق سطحها علمًا بأن كتلة الأرض تساوي 6×10^{24} و ثابت الجذب العام 6.67×10^{-11} نيوتن.م²/كجم² ، وعجلة الجاذبية الأرضية $g = 9.8$ م/ث²

الحل

∴ وزن الجسم هو قوة جذب الأرض له

$$\therefore F = \frac{G m_1 M}{r^2} \quad \text{حيث } m_1 \text{ كتلة الجسم ، } M \text{ كتلة الأرض}$$

$$\therefore 9.8 \times 1 = \frac{6.67 \times 10^{-11} \times 6 \times 10^{24}}{r^2}$$

$$\therefore \text{نق (طول نصف قطر الأرض)} = 6420.662 \text{ متر} = 6390 \text{ كم}$$

احسب عجلة الجاذبية الأرضية بوحدة م/ث² لجسم كتلته 1 كجم وضع فوق سطحها.
علمًا بأن كتلة الأرض تساوي 6×10^{24} كجم ، نصف قطر الأرض يساوي 6360 كم
ثابت الجذب العام 6.67×10^{-11} نيوتن.م²/كجم²

الحل

∴ وزن الجسم هو قوة جذب الأرض له
 ∴ $G = \frac{G}{r^2} \times \text{ث}$ حيث G كتلة الجسم ، r كتلة الأرض.

$$\frac{6.67 \times 10^{-11} \times 5.95 \times 10^{24}}{(6360000)^2} \times 1 = 9.81 \text{ متر/ث}^2$$

 ∴ G (عجلة الجاذبية الأرضية) = 9.81 متر/ث².

المقارنة بين عجلتي الجاذبية على سطحي كوكبين

بفرض r_1 ، r_2 عجلتي الجاذبية على سطحي كوكبين كتلتاهما M_1 ، M_2 كجم وطولاهما r_1 ، r_2 متر وكان جسم كتلته m كجم موضوع على سطح أحد الكوكبين.

* بالنسبة للكوكب الأول :

∴ وزن الجسم على الكوكب = قوة جذب الكوكب للجسم

$$\therefore G_1 = \frac{G}{r_1^2} \times \text{ث}$$

* بالنسبة للكوكب الثاني :

∴ وزن الجسم على الكوكب = قوة جذب الكوكب للجسم

$$\therefore G_2 = \frac{G}{r_2^2} \times \text{ث}$$

$$\text{بقسمة (١) على (٢) : } \therefore \frac{\frac{G}{r_1^2} \times \text{ث}}{\frac{G}{r_2^2} \times \text{ث}} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$$

مثال ٨

كوكب كتلته ثلاثة أمثال كتلة الأرض وقطره ضعف قطر الأرض.

احسب النسبة بين عجلة الجاذبية على هذا الكوكب وعجلة الجاذبية الأرضية.

الحل

بفرض r_1 عجلة الجاذبية الأرضية ، r_2 كتلة الأرض ، r_3 طول نصف قطرها ، r_4 عجلة الجاذبية على الكوكب ، r_5 كتلة الكوكب ، r_6 طول نصف قطره.

$$\frac{F}{F_1} = \frac{M_2}{M_1} \times \frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{1}{16}$$

$$\therefore F = \frac{1}{16} F_1 \quad \text{و} \quad F_2 = \frac{1}{4} F_1 \quad \text{و} \quad F_3 = \frac{1}{9} F_1$$

$$\frac{F}{F_1} = \frac{M_2}{M_1} \times \frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{1}{16} \therefore$$

مثال ٩

إذا علمت أن كتلة الأرض 5.97×10^{24} كجم وطول نصف قطرها 6.37×10^6 م وكتلة القمر 7.36×10^{22} وطول نصف قطره 1.74×10^6 م فأوجد النسبة بين عجلة الجاذبية على سطح القمر إلى سطح الأرض.

الحل

بفرض عجلة الجاذبية على سطح القمر a_c ، على سطح الأرض a_e

$$\frac{a_c}{a_e} = \frac{F_c}{F_e} = \frac{M_c}{M_e} \times \frac{r_e^2}{r_c^2} = \frac{1}{16}$$

$$\therefore a_c = \frac{1}{16} a_e = 0.61 \text{ م/ث}^2$$

أي أن : عجلة الجاذبية على سطح القمر سدس مقدارها على سطح الأرض تقريباً.

شدة مجال الجاذبية الأرضية

في قوة جذب الأرض لكتلة تساوي ١ كجم عند نقطة ما.

فمثلاً : بفرض جسم كتلته ١ كجم موضوع على ارتفاع h متر من سطح الأرض

$$\text{فإن شدة مجال الجاذبية} = \frac{F}{m} = \frac{G M}{(R+h)^2}$$

حيث G ثابت الجذب العام ، M كتلة الأرض بالكجم ، R طول نصف قطر الأرض بالمتر.

مثال ١٠

إذا علمت أن كتلة الأرض 5.97×10^{24} كجم وطول نصف قطرها 6.37×10^6 متر. احسب شدة مجال الجاذبية الأرضية على ارتفاع ٥٠ كم من سطح الأرض.

الحل

$$\text{بفرض جسم كتلته ١ كجم موضوع على ارتفاع } 50 \text{ كم} = 50000 \text{ متر من سطح الأرض}$$

$$\text{فإن شدة مجال الجاذبية} = \frac{G M}{(R+h)^2} = \frac{6.67 \times 10^{-11} \times 5.97 \times 10^{24}}{(6.37 \times 10^6 + 50000)^2} = 9.79 \text{ نيوتن}$$

على قانون الجذب العام

ملاحظة :

اعتبر ثابت الجذب العام لنيوتن : $\gamma = 6,67 \times 10^{-11}$ نيوتن. م²/كجم

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ قوة التجاذب بين كتلتين كل منهما ٥٠ كجم والمسافة بين مركزيهما ٥٠ سم هي نيوتن.

(أ) ١ (ب) ٩,٨ (ج) $6,67 \times 10^{-11}$ (د) $6,67 \times 10^{-11}$

٢ كتلتان قوة الجذب بينهما ٢ نيوتن زادت المسافة بينهما إلى الضعف فإن قوة الجذب بينهما تصبح نيوتن.

(أ) ٤ (ب) ٢ (ج) ١ (د) $\frac{1}{2}$

٣ كوكبان كتلة الأول ضعف كتلة الثاني ونصف قطر الثاني ضعف نصف قطر الأول نسبة عجلة جاذبية الأول إلى عجلة جاذبية الثاني = :

(أ) ١ : ٨ (ب) ١ : ٤ (ج) ١ : ٢ (د) ١ : ١

٤ ماذا يحدث لوزنك كلما ابتعدت عن سطح الأرض ؟

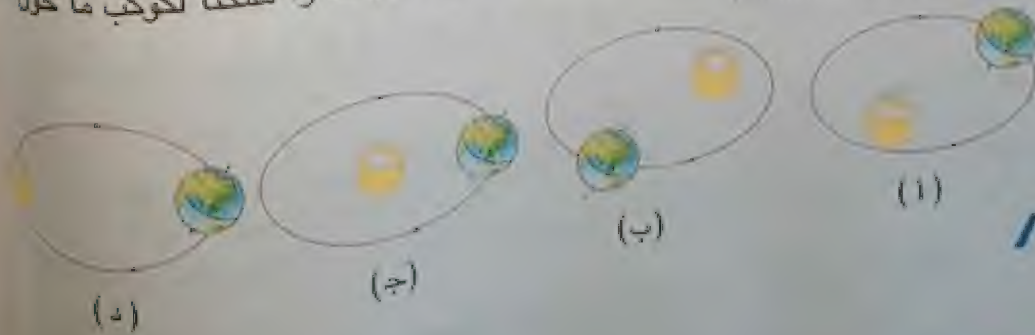
(أ) يزداد. (ب) لا يتأثر. (ج) يتضاعف. (د) يقل.

٥ لا تظهر قوى التجاذب المادي بين الأجرام السماوية بوضوح وذلك :

(أ) لبعيد المسافة بينهما. (ب) لكبر كتل هذه الأجسام.

(ج) لقرب المسافة بينهما. (د) ب ، ج ، د معاً

٦ أي من المدارات الموضحة بالشكل التالي يُعتبر مداراً ممكناً لكوكب ما حول الشمس ؟



- ٧) ماذا يحدث لقوة الجذب بين جسمين عند مضاعفة المسافة بين مركزيهما ؟
- (أ) تصبح الضعف.
- (ب) تصبح أربعة أمثال.
- (ج) تصبح النصف.
- (د) تصبح الربع.

٢ كرتان كتلة الأولى ٥.٢ كجم وكتلة الثانية ٠.٢٥ كجم وضعت الكرتان بحيث كانت المسافة بين مركزيهما ٥٠ سم. احسب قوة التجاذب بينهما علماً بأن ثابت الجذب العام يساوى 6.67×10^{-11} نيوتن. م^٢/كجم^٢

«١٠ × ٣.٤٦٨٤ نيوتن»

٣ احسب قوة التجاذب المتبادلة بين الشمس والأرض إذا علمت أن الأرض تسير في مدار شبه دائري حول الشمس وأن كتلة الأرض تساوى 6×10^{24} كجم ، وكتلة الشمس تساوى 1.9×10^{30} كجم ، والمسافة بين مركزيهما تساوى 1.5×10^{11} متر. «١٠ × ٣.٣٧٩ نيوتن»

٤ إذا علمت أن كتلة الأرض 6×10^{24} كجم وكتلة القمر 7×10^{22} كجم والمسافة بين مركزيهما 3×10^8 متر وثابت الجذب العام 6.67×10^{-11} نيوتن. م^٢/كجم^٢.

أوجد قوة جذب الأرض للقمر.

«١٠ × ٣.١١ نيوتن»

٥ أوجد قوة الجذب العام بين كوكبين كتلة الأول 2×10^{21} طن وكتلة الثانى = 4×10^{20} طن ، والمسافة بين مركزيهما 2×10^6 كم.

«١٠ × ١.٢٣٤ نيوتن»

٦ قمر صناعى كتلته ٤٠٠٠ كجم يدور حول الأرض فى مدار شبه دائرى على ارتفاع ٤٤٠ كم من سطح الأرض. فإذا كانت كتلة الأرض 6×10^{24} كجم وطول نصف قطرها 6.36×10^6 متر.

أوجد قوة الجذب المتبادلة بين الأرض والقمر الصناعى.

«١٠ × ٣.٦٦٩ نيوتن»

٧ صاروخ كتلته ٨ طن انطلق من على سطح الأرض وبعد أن أصبح على بعد ١٥٠ كم من سطح الأرض فقد ربع كتلته نتيجة لاحتراق الوقود احسب وزنه حينئذ علماً بأن كتلة الأرض 5.97×10^{24} كجم وطول نصف قطرها ٦٣٦٠ كم.

«١٠ × ٥.٦٣٧٥ نيوتن»

٨ زادت المسافة بين مركزي كتلتين إلى الضعف فقلت قوة الجاذبية بينهما.

أوجد النسبة بين قوة الجذب قبل زيادة المسافة وبعدها.

«١ : ٤»

٩ قلت المسافة بين مركزي كتلتين فزادت قوة الجاذبية بينهما تسعة أضعاف.
أوجد النسبة بين المسافتين.

١٠ وضعت كرة من الحديد على بعد ٤٠ سم من كرة أخرى من النيكل كتلتها ٥٠ كجم فكانت قوة التجاذب بينهما 12×10^{-11} نيوتن، فكم تكون كتلة كرة الحديد إذا علمت أن ثابت الجذب العام يساوي $6,67 \times 10^{-11}$ نيوتن. م^٢/كجم^٢

١١ قمر صناعي كتلته $\frac{3}{4}$ طن يدور حول الأرض على ارتفاع ثابت فإذا كانت كتلة الأرض 6×10^{24} كجم وطول نصف قطرها ٦٣٦٠ كم وقوة جذب الأرض للقمر $1,26 \times 10^{11}$ نيوتن أوجد ارتفاع القمر عن سطح الأرض.

١٢ قمر صناعي كتلته ٤ كجم يدور على ارتفاع ٤٤٠ كم من سطح الأرض التي كتلتها 6×10^{24} كجم ونصف قطرها ٦٣٦٠ كم. أوجد له لأقرب كجم علمًا بأن ثابت الجذب العام يساوي $6,67 \times 10^{-11}$ نيوتن. م^٢/كجم^٢ ، قوة جذب الأرض للقمر هي ١٧٣١٠ نيوتن.

١٣ إذا علمت أن كتلة الأرض $5,97 \times 10^{24}$ كجم وطول نصف قطرها $6,34 \times 10^6$ متر أوجد شدة جذب الأرض لجسم كتلته ١٠٠٠ كجم موضوع على سطح الأرض ومنها أوجد عجلة الجاذبية الأرضية.

١٤ أوجد عجلة الجاذبية على سطح كوكب المشتري علمًا بأن كتلة المشتري $1,898 \times 10^{27}$ كجم وطول نصف قطره ٦٩٩١١ كم.

١٥ احسب عجلة الجاذبية الأرضية عند نقطة على عمق ٨٠٠٠ متر من سطح الأرض إذا علم أن كتلة الأرض 6×10^{24} كجم وطول نصف قطرها ٦٣٦٠ كم.

١٦ إذا كانت عجلة الجاذبية الأرضية (g) هي ١٠ م/ث^٢ ونصف قطر الأرض يساوي $6,37 \times 10^6$ متر، احسب كتلة الأرض.

١٧ أوجد كتلة كوكب المريخ إذا علمت أن عجلة جاذبيته ٣,٧١١ متر/ث^٢ وطول نصف قطره ٣٣٩٠ كم.

إذا علمت أن قوة الجذب المتبادلة بين الشمس والأرض هي 35.67×10^{21} نيوتن وأن كتلة كل من الأرض والشمس هما 5.97×10^{24} كجم و 1.9×10^{27} كجم، على الترتيب أوجد المسافة بين الأرض والشمس إذا علم أن ثابت الجذب العام يساوي 6.67×10^{-11} نيوتن. م²/كجم²

1.496×10^{11} متر

كوكبان الأول كتلته 1.9×10^{24} كجم وطول نصف قطره 2000 كم والآخر كتلته 3.8×10^{24} كجم وطول نصف قطره 3000 كم. أوجد النسبة بين عجلتي الجاذبية في كل من الكوكبين.

0.5

كوكب كتلته مساوية لثلاث مرات كتلة الأرض وقطره يساوي ثلاث مرات قدر قطر الأرض. احسب النسبة بين عجلة الجاذبية على سطح هذا الكوكب و سطح الأرض.

0.3

إذا كان طول نصف قطر كل من القمر والأرض 1600 كم و 6400 كم على الترتيب وكانت النسبة بين عجلتي الجاذبية لكل منهما $6:1$ فأوجد النسبة بين كتلتيهما على الترتيب.

$1:16$

إذا كانت كتلة الأرض قدر كتلة القمر 81 مرة وقطرها 12756 كم و 3476 كم على الترتيب فإذا كانت عجلة الجاذبية الأرضية 9.8 م/ث² فكم يكون تسارع الجاذبية على سطح القمر ؟

1.63 م/ث²

إذا كانت كتلة المريخ تساوي 0.107 من كتلة الأرض وطول نصف قطر الأرض 6400 كم وعجلة الجاذبية على سطح المريخ تساوي 0.38 من عجلة الجاذبية على سطح الأرض. احسب طول نصف قطر المريخ.

3.3961×10^6 متر

إذا علمت أن كتلة الأرض تساوي 5.97×10^{24} كجم وطول نصف قطرها 6.37×10^6 متر وكتلة القمر تساوي 7.36×10^{22} كجم فأوجد طول نصف قطر القمر إذا كانت الجاذبية على سطح الأرض ستة أمثالها على سطح القمر.

1.472×10^6 متر

٢٥ إذا علمت أن كتلة الأرض 6.0×10^{24} كجم وطول نصف قطرها 6.37×10^6 متر، فأوجد شدة مجال الجاذبية الأرضية على سطح الأرض.

٢٦ محطة فضائية دولية وزنها على سطح الأرض 421997.6 نيوتن. أوجد وزنها عندما تكون في المدار الخارجى على ارتفاع 350 كم من سطح الأرض علماً بأن طول نصف قطر الأرض يساوى 6.37×10^6 كم وكتلتها 5.97×10^{24} كجم.

٢٧ مركبة فضائية وزنها 219600 نيوتن على سطح الأرض ووزنها على سطح المريخ 83157 نيوتن فإذا كانت كتلة الأرض 6×10^{24} كجم وطول نصف قطرها 6370 كم، وكتلة المريخ 6.39×10^{23} كجم أوجد طول نصف قطر كوكب المريخ.

٢٨ سقطت كرة من يد رائد فضاء من على ارتفاع 735 سم من سطح القمر فاصطدمت بسطح القمر بعد 3 ثوانٍ فإذا كانت كتلة القمر 7.36×10^{22} كجم وكتلة الأرض 5.97×10^{24} كجم وطول نصف قطر الأرض 6.34×10^6 متر وعجلة جاذبية الأرض هي 9.8 متر/ث^٢، أوجد طول نصف قطر القمر.

٢٩ إحدى شركات التنقيب عن البترول بالبحر الأبيض المتوسط قامت بدق أسطوانة مفرغة ارتفاعها 2000 متر ثم قامت بإنزال جسم كتلته واحد طن مربوطاً بحبل سوف ينقطع إذا بلغ الشد فيه 9900 نيوتن فى هذه الأسطوانة فإذا كانت كتلة الأرض 6×10^{24} كجم وطول نصف قطرها 6370000 متر فهل سيصل الجسم إلى قاع الأسطوانة أم سينقطع الحبل قبلها وإن كان الحبل سينقطع فأحسب المسافة التى تدلى بها الحبل إلى لحظة انقطاعه.

سينقطع ، 1993.833 متر

الاحتمال

2 الوحدة



الدرس 1 بعض المصطلحات والمفاهيم الأساسية - الأحداث - العمليات على الأحداث.

الدرس 2 مسلمات وقوانين الاحتمال - حساب الاحتمال.

٦١٠ × متر
٩.٩٩٣ نيوتن

الأرض علماً
كجم

٦١٠ × نيوتن

ريخ
٦٣٦ كم

٦١٠ × متر

بسطح القمر
كجم وطول

١٧٤٤٣ متر

مفرغة

ينقطع

٢٤١ كجم

سينقطع

إلى لحظة

١٩٩٣ متر

B612

الدرس

1

بعض المصطلحات والمفاهيم الأساسية - الأحداث - العمليات على الأحداث

* لاحظ كلا من المواقف التالية :

سلة بها ٣ كرات
حمراء متماثلة



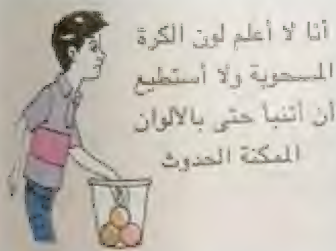
تجربة غير عشوائية

سلة بها ٣ كرات متماثلة ألوانها
(حمراء - خضراء - سوداء)



تجربة عشوائية

سلة تحتوي على ٣ كرات
متماثلة غير معروف ألوانها



تجربة غير عشوائية

* التجربة العشوائية :

هي كل تجربة يمكن معرفة جميع النواتج الممكنة لها قبل إجرائها ولكن لا نستطيع أن نحدد أيًا من هذه النواتج سوف يتحقق فعلاً عند إجرائها.

* فضاء العينة (أو فضاء النواتج) :

هو مجموعة كل النواتج الممكنة الحدوث لتجربة عشوائية ما ويرمز له عادة بالرمز (ف) ويرمز لعدد عناصر فضاء العينة بالرمز $n(F)$.

يُأَيَّ من التجارب التالية عشوائية وأيها غير عشوائية ثم اكتب فضاء العينة لكل من التجارب العشوائية ، مبيناً عدد عناصره :

- ١ إلقاء قطعة نقود مرة واحدة وملاحظة الوجه الظاهر.
- ٢ إلقاء حجر نرد مرة واحدة وملاحظة العدد الظاهر على الوجه العلوي.
- ٣ سحب بطاقة من خمس بطاقات مرقمة من ١٠ إلى ١٤ وملاحظة العدد المكتوب على البطاقة.
- ٤ سحب بطاقة مرقمة من حقيبة تحتوي على مجموعة من البطاقات المرقمة (دون أن نعرف أرقامها) وملاحظة رقم البطاقة المسحوبة.
- ٥ سحب كرة من كيس يحتوي على كرة سوداء وكرة حمراء وكرة صفراء وكرة بيضاء وملاحظة لون الكرة المسحوبة.
- ٦ اختيار عدد أولى ينحصر بين ١٥ ، ٣٢

الحل

١ التجربة عشوائية ، النواتج الممكنة لهذه التجربة هي : صورة (ص) ، كتابة (ك)
 $\therefore F = \{ص ، ك\} ، n(F) = ٢$

٢ التجربة عشوائية ، $F = \{١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦\} ، n(F) = ٦$

٣ التجربة عشوائية ، $F = \{١٠ ، ١١ ، ١٢ ، ١٣ ، ١٤\} ، n(F) = ٥$

٤ التجربة غير عشوائية.

٥ التجربة عشوائية ، $F = \{أسود ، أحمر ، أصفر ، أبيض\} ، n(F) = ٤$

٦ التجربة عشوائية ، $F = \{١٧ ، ١٩ ، ٢٣ ، ٢٩ ، ٣١\} ، n(F) = ٥$

اكتب فضاء العينة لتجربة إلقاء قطعة نقود مرتين متتاليتين وملاحظة نتائج الصور والكتابات مبيناً عدد عناصره.

الحل

كل ناتج من نواتج التجربة هو زوج مرتب على الصورة : (ناتج الرمية الأولى ، ناتج الرمية الثانية)
 وبحيث إن النواتج الممكنة لكل من الرميّتين الأولى والثانية هي : صورة (ص) ، كتابة (ك)
 $\therefore F = \{(ص ، ص) ، (ص ، ك) ، (ك ، ص) ، (ك ، ك)\}$

$$\text{أي أن } F = \{ص، ك\} \times \{ص، ك\}$$

$$n(F) = 2^2 = 4$$

ويمكن التوصل إلى عناصر فضاء العينة بواسطة الشجرة البيانية المقابلة :

للحفاظ أن $(ص، ك) \neq (ك، ص)$

ملاحظة :

فضاء نواتج إلقاء قطعتي نقود متميزتين (مختلفتين في اللون أو الشكل أو الحجم ...) مدًا في أن واحد هو نفس فضاء نواتج إلقاء قطعة نقود واحدة مرتين متتاليتين.

ويكون كل ناتج من نواتج التجربة هو زوج مرتب على الصورة (وجه القطعة الأولى ، وجه القطعة الثانية)

مثال ٢

اكتب فضاء العينة لتجربة إلقاء حجر نرد مرتين متتاليتين وملاحظة العدد الذي يظهر على الوجه العلوي في الرميّتين مبيّنًا عدد عناصره.

الحل

كل ناتج من نواتج التجربة هو زوج مرتب على الصورة : (ناتج الرمية الأولى ، ناتج الرمية الثانية) $\therefore F = \{(س، ص) : س \in \{1، 2، 3، 4، 5، 6\}، ص \in \{1، 2، 3، 4، 5، 6\}\}$

$$\text{أي أن } F = \{1، 2، 3، 4، 5، 6\} \times \{1، 2، 3، 4، 5، 6\}$$

$$n(F) = 6^2 = 36$$

ويمكن

على

نواتج الر

هتد

نواتج الرمية الأولى

ملاحظ

* قض

حجر

* عدد

حيث

فمثلا

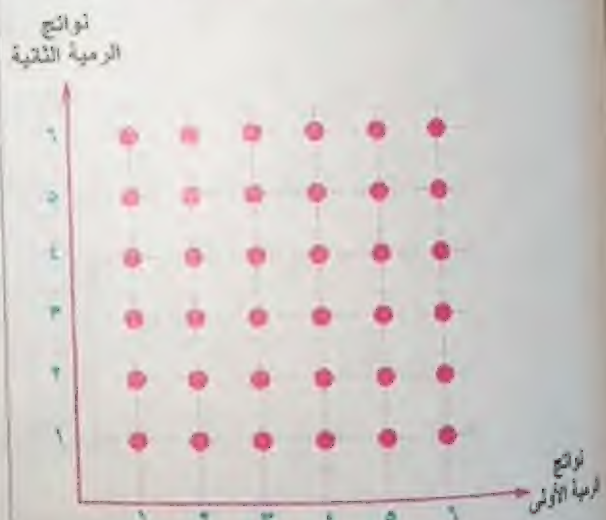
أعلى صورة جدول :

ناتج الرمية الأولى		ناتج الرمية الثانية					
1	2	3	4	5	6	1	2
(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)	(2, 1)	(2, 2)
(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)	(3, 1)	(3, 2)
(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)	(4, 1)	(4, 2)
(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)	(5, 1)	(5, 2)
(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)	(6, 1)	(6, 2)
(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)		

٣ بالشجرة البيانية :



٢ هندسياً على الشبكة البيانية :



ملاحظات :

- فضاء العينة لتجربة إلقاء حجر نرد مرتين متتاليتين هو نفسه فضاء العينة لتجربة إلقاء حجر نرد متميزين مرة واحدة.
- عدد عناصر فضاء العينة $n = 36$
- حيث n هو عدد النواتج الممكنة للرمية الواحدة ، m هو عدد الرميات.
- مثلاً عند إلقاء حجر نرد ثلاث مرات فإن عدد عناصر فضاء العينة $n = 3^3 = 27$

مثال ٤

صندوق به ٣ كرات إحداها بيضاء والثانية حمراء والثالثة سوداء. سحب كرتان من الصندوق ولو حظ لونهما.

أوجد فضاء العينة مبيئاً عدد عناصره في كل من الحالات الآتية :

- ١ إذا سحب كرتان الواحدة بعد الأخرى مع الإحلال.
- ٢ إذا سحب كرتان الواحدة وراء الأخرى بدون إحلال.
- ٣ إذا سحب كرتان معاً.

الحل

نرمز للكرة البيضاء (ب) ، والكرة الحمراء (ح) والكرة السوداء (س)

١ إذا سحب كرتان الواحدة بعد الأخرى مع الإحلال
«معناها أن الكرة المسحوبة أولاً تعاد إلى الصندوق قبل السحبة الثانية».

وباستخدام الشجرة البيانية المقابلة نجد أن :

$$ف = \{(ب، ب)، (ب، ح)، (ب، س)، (ح، ب)، (ح، ح)، (ح، س)، (س، ب)، (س، ح)، (س، س)\}$$

$$ن(ف) = 9$$

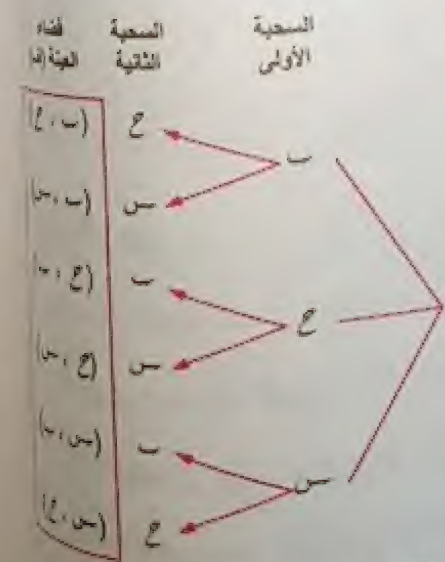
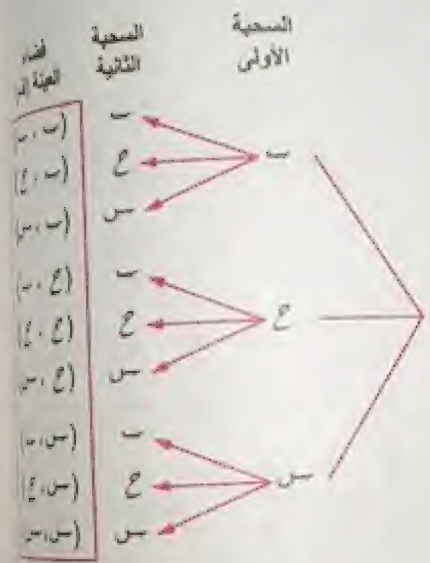
٢ إذا سحب كرتان الواحدة وراء الأخرى بدون إحلال
«معناها أن الكرة المسحوبة أولاً لا تعاد إلى الصندوق قبل السحبة الثانية».

وباستخدام الشجرة البيانية المقابلة نجد أن :

$$ف = \{(ب، ح)، (ب، س)، (ح، ب)، (ح، س)، (س، ب)، (س، ح)\}$$

$$ن(ف) = 6$$

٣ إذا سحب كرتان معاً
ف = $\{(ب، ب)، (ب، ح)، (ب، س)، (ح، ب)، (ح، ح)، (ح، س), (س، ب)، (س، ح)، (س، س)\}$ ، $ن(ف) = 3$



ملاحظة :
يكون فضاء العينة منتهياً إذا كان عدد عناصره محدوداً ويكون غير منته إذا كان عدد عناصره غير محدود وسندرس فقط فضاء النواتج المنتهى.

* لاحظ في تجربة إلقاء حجر نرد مرتين متتاليتين الفرق بين :

١ ملاحظة «العددين الظاهرين على الوجه العلوى».

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = F_1$$

$$= \{(1, 1), (1, 2), \dots, (6, 6)\} \quad n(F_1) = 36 = 6^2$$

٢ ملاحظة «مجموع العددين الظاهرين على الوجه العلوى».

$$F_2 = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\} \quad n(F_2) = 11$$

لاحظ أن $F_1 \neq F_2$ ، $n(F_1) \neq n(F_2)$

الأحداث

* الحدث :

هو أى مجموعة جزئية من فضاء العينة.

* وقوع الحدث :

يقال إن حدثاً ما قد وقع إذا كان ناتج التجربة العشوائية هو أحد عناصر المجموعة التى يتألف منها هذا الحدث.

* الحدث المؤكد (Ω) :

هو حدث لا بد أن يقع عند إجراء التجربة العشوائية.

* الحدث المستحيل (∅) :

هو حدث لا يمكن أن يقع عند إجراء التجربة العشوائية.

* الحدث البسيط (أو الأولي) :

هو مجموعة جزئية من فضاء العينة (F) تحتوى على عنصر واحد فقط.

1 تقاطع حدثين $(A \cap B)$:

* هو حدث وقوع A و B معاً

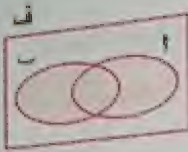
* هو حدث وقوع الحدثين معاً.



2 اتحاد حدثين $(A \cup B)$:

* هو حدث وقوع A أو B أو كليهما

* هو حدث وقوع أحدهما على الأقل.



3 الفرق بين حدثين $(A - B)$:

* هو حدث وقوع A فقط.

* هو حدث وقوع A و عدم وقوع B

$$A - B = A \cap B^c$$



4 الحدث المكمل (A^c) :

* هو حدث عدم وقوع A



فمثلاً في تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة وملاحظة العدد الظاهر على الوجه العلوي نجد أن

$$F = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

وإذا كان: A حدث الحصول على عدد زوجي، B حدث الحصول على عدد أولي

$$F_A = \{2, 4, 6\}, F_B = \{2, 3, 5\}$$

$$A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

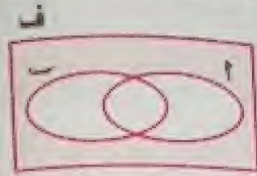
$$A \cap B = \{2\}$$

$$A - B = \{4, 6\}$$

$$A^c = \{1, 3, 5\}$$

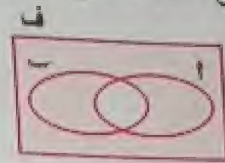
* والجدول الآتي يوضح بعض الأحداث والتعبير اللفظي عنها وتمثيلها بشكل فن :

* حدث عدم وقوع أي من الحدثين.
* حدث عدم وقوع ١ وعدم وقوع ٢



$$\overline{1 \cup 2} = \overline{1} \cap \overline{2}$$

* حدث عدم وقوع الحدثين ١ و ٢ معًا.
* حدث وقوع أحدهما على الأكثر.



$$\overline{1 \cap 2} = \overline{1} \cup \overline{2}$$

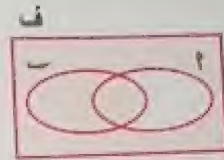
قانونا دي مورجان

* حدث وقوع أحد الحدثين دون الآخر.
* حدث وقوع أحد الحدثين فقط.
* حدث وقوع ١ فقط أو وقوع ٢ فقط.



$$(1 - 2) \cup (2 - 1) \\ (1 \cap 2) - (1 \cup 2) =$$

* حدث وقوع ٢ أو عدم وقوع ١
* حدث عدم وقوع ١ فقط.



$$2 - 1 = \overline{1} \cup 2$$

الحل

فضاء العينة

$$\{1, 2\} = 1 \cup 2$$

$$\{3\} = 1 - 2$$

$$\{5\} = 2 - 1$$

* **الأحداث المتنافية** : يقال إن الحدثين متنافيان إذا استحال وقوعهما معًا (في نفس الوقت) أي أن وقوع أحدهما ينفي وقوع الآخر.

فمثلاً : إذا كان ١ «حدث نجاح باسم في امتحان ما» ، ٢ «حدث رسوبه في نفس الامتحان» فإن وقوع أحد الحدثين ينفي وقوع الآخر.
∴ ١ ، ٢ حدثان متنافيان.

تعريف

- ١ يقال إن الحدثين ١ ، ٢ من فضاء عينة ف متنافيان إذا وفقط إذا كان $1 \cap 2 = \emptyset$
- ٢ يقال لعدة أحداث إنها متنافية إذا وفقط إذا كانت متنافية مثلي مثلي.

ملاحظات :

* الأحداث البسيطة (الأولية) المختلفة في أي تجربة عشوائية تكون متنافية.
* الحدث ١ ومكملة ١ حدثان متنافيان ويكون :

$$1 \cap \overline{1} = \emptyset \quad (\text{الحدث المستحيل})$$

$$1 \cup \overline{1} = F \quad (\text{الحدث المؤكد})$$

في تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة وملاحظة العدد الذي يظهر على الوجه العلوي له، اكتب فضاء العينة ثم اكتب كلاً من الأحداث الآتية مبيناً أيّاً من هذه الأحداث بسيط وأيها مؤكد وأيها مستحيل :

- ١ حدث «الحصول على عدد أكبر من أو يساوي ٣»
- ٢ ب حدث «الحصول على عدد أصغر من ٥»
- ٣ ح حدث «الحصول على عدد يقبل القسمة على ٣»
- ٤ د حدث «الحصول على عدد فردي غير أولي»
- ٥ هـ حدث «الحصول على عدد أكبر من ٢ وأصغر من ٣»
- ٦ و حدث «الحصول على عدد ينحصر بين ٠ ، ٧»

الحل

فضاء العينة $F = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- | | |
|---------------------------|--------------------------|
| ١ {1, 2, 3, 4, 5, 6} = أ | ٢ {1, 2, 3, 4, 5, 6} = ب |
| ٣ {1, 2, 3, 4, 5, 6} = ج | ٤ {1, 2, 3, 4, 5, 6} = د |
| ٥ {1, 2, 3, 4, 5, 6} = هـ | ٦ {1, 2, 3, 4, 5, 6} = و |

في تجربة اختيار عدد صحيح من بين الأعداد ١ إلى ١٠

اكتب فضاء النواتج ثم عيّن كلاً من الأحداث الآتية :

- ١ أ حدث «الحصول على عدد زوجي»
- ٢ ب حدث «الحصول على عدد أولي»
- ٣ ح حدث «الحصول على عدد فردي»
- ٤ د حدث «الحصول على عدد يقبل القسمة على ٤»
- ٥ هـ حدث «الحصول على عدد ≥ 2 »
- ٦ و حدث «الحصول على عدد مربع كامل»
- ٧ ز حدث «الحصول على عدد زوجي أولي»
- ٨ ل حدث «الحصول على عدد زوجي أو أولي»
- ٩ س حدث «الحصول على عدد يحقق المعادلة : $5 - 2 = 36$ »
- ص حدث «الحصول على عدد يحقق المتباينة : $1 - 2 \leq 20$ »

من مجموعة الأرقام $\{1, 2, 3, 4\}$ كون عدد من رقمين مختلفين.
اكتب فضاء العينة لهذه التجربة ثم أوجد كلاً من الأحداث الآتية :

- ١ حدث «مجموع الرقمين $= 7$ »
 - ٢ حدث «مجموع الرقمين عدد زوجي».
 - ٣ حدث «مجموع الرقمين عدد أولي».
 - ٤ حدث «العدد الناتج يقبل القسمة على ٣».
 - ٥ حدث «رقم الآحاد زوجي».
 - ٦ حدث «رقم العشرات أولي».
- ثم أوجد كلاً من : $A \cup B, A \cap B, A - B, A \cap A^c$

الحل

باستخدام الشجرة البيانية المقابلة نجد أن :

$$F = \{21, 31, 41, 12, 22, 32, 42, 13, 23, 33, 43, 14, 24, 34, 44\}$$

$$A = \{24, 42\}$$

$$B = \{24, 42, 13, 31\}$$

$$C = \{24, 14, 43, 23, 32, 12, 41, 21\}$$

$$D = \{24, 42, 12, 21\}$$

$$E = \{24, 24, 14, 42, 22, 12\}$$

$$F = \{24, 24, 23, 32, 31, 21\}$$

$$G = A \cup B = \{24, 42, 13, 31, 34, 43\}$$

$$H = A - B = \{24, 14, 32, 12\}$$

$$I = A \cap B = \{24, 42\}$$

$$J = (A \cup B)^c = A^c \cap B^c = \{14, 23, 32, 12, 41, 21\}$$



فضاء العينة

في تجربة إلقاء حجر نرد مرتين متتاليتين وملاحظة العدد الذي يظهر على الوجه العلوي في الرمتين
ارسم شكلاً هندسياً لفضاء العينة ثم اكتب كلاً من الأحداث الآتية موضعاً إياها على الشكل
الهندسي لفضاء العينة :

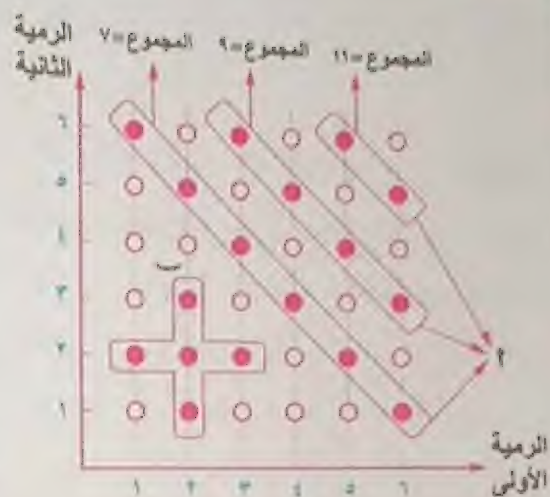
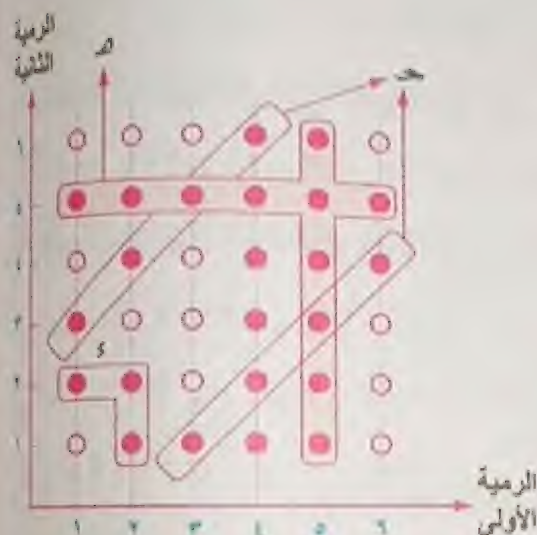
- ١ حدث «الحصول على عددين مجموعهما فردي وأكبر من ٦».

{e}

B612

- ٢ حدث «الحصول على عددين أحدهما ٢ ومجموعهما أصغر من أو يساوي ٥».
- ٣ حدث «الحصول على عددين الفرق المطلق بينهما يساوي ٢».
- ٤ حدث «الحصول على عددين أكبرهما هو العدد ٢».
- ٥ حدث «الحصول على العدد ٥ مرة واحدة على الأقل».
- بين هل الأحداث ٢، ٣، ٤ متنافية أم لا.

الحل



$$١ = \{(١, ٢), (٢, ٥), (٣, ٤), (٤, ٣), (٥, ٢), (٦, ١), (٣, ٦)\}$$

$$\{(٦, ٥), (٥, ٦), (٦, ٣), (٥, ٤), (٤, ٥),$$

$$٢ = \{(٢, ١), (٢, ٣), (٣, ٢), (٢, ٢), (١, ٢)\}$$

$$٣ = \{(٣, ٥), (٢, ٤), (١, ٣)\}$$

$$\{(٤, ٢), (٣, ١), (٤, ٦),$$

$$\{(٦, ٤), (٥, ٣),$$

$$٤ = \{(٢, ٢), (١, ٢), (٢, ١)\}$$

الاحظ أنه:

إذا كان الفرق المطلق بين عددين = ٢

فإن العددين يمكن أن يكونا (٣, ٥)

أو (٥, ٣) ...

لأن: $٢ = |٥ - ٣| = |٣ - ٥|$

$$\begin{aligned} & \{ (1, 0), (2, 0), (3, 0), (4, 0) \} = \text{د} \\ & \{ (0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (0, 4), (1, 0), (2, 0), (3, 0), (4, 0) \} \\ & \therefore \text{الحدثان } \uparrow, \text{ ب متنافيان} \quad \emptyset = \text{ب} \cap \uparrow \\ & \therefore \text{الحدثان } \uparrow, \text{ د متنافيان} \quad \emptyset = \text{د} \cap \uparrow \\ & \therefore \text{الأحداث } \uparrow, \text{ ب, د غير متنافية} \quad \emptyset \neq \text{ب} \cap \text{د} \end{aligned}$$

مثال ١١

ألقيت قطعة نقود مرة واحدة. فإذا كان الوجه الظاهر يحمل كتابة فسوف يلقي حجر نرد مرة واحدة أما إذا كان يحمل صورة فسوف تلقى قطعة النقود مرة ثانية.
اكتب فضاء العينة ثم اكتب كلاً من الأحداث الآتية :

- | | |
|--|--------------------------------------|
| ١ حدث «ظهور كتابة وعدد زوجي». | ٢ ب حدث «ظهور صورة أو عدد أولي». |
| ٣ ح حدث «ظهور كتابة على الأقل». | ٤ د حدث «ظهور كتابة وعدد مربع كامل». |
| ٥ هـ حدث «ظهور صورة أو عدد أصغر من ٢». | ٦ و حدث «عدم وقوع ح». |
| ٧ ز حدث «وقوع أ وعدم وقوع د». | ٨ ح حدث «وقوع أ، هـ معاً». |

الحل

باستخدام الشجرة البيانية المقابلة نجد أن :



$$\begin{aligned} & \text{ف} = \{ (ص, ص), (ص, ك), (ص, ١), (ص, ٢), (ص, ٣), (ص, ٤), (ك, ص), (ك, ك), (ك, ١), (ك, ٢), (ك, ٣), (ك, ٤) \} \\ & \uparrow = \{ (١, ك), (٢, ك), (٣, ك), (٤, ك), (٥, ك), (٦, ك) \} \\ & \text{ب} = \{ (ص, ص), (ص, ك), (ك, ص), (ك, ك) \} \\ & \text{ح} = \{ (١, ك), (٢, ك), (٣, ك), (٤, ك), (٥, ك), (٦, ك) \} \\ & \text{د} = \{ (١, ك), (٢, ك) \} \\ & \text{هـ} = \{ (ص, ص), (ص, ك), (ك, ص), (ك, ك) \} \\ & \text{و} = \{ (ص, ص) \} \\ & \text{ز} = \{ (٢, ك) \} \end{aligned}$$

B612

على بعض المصطلحات والتجارب الأساسية - الأحداث - العمليات على الأحداث

١ اكتب فضاء العينة لكل من التجارب العشوائية الآتية ، مبيّناً عدد عناصره :

١ سحب بطاقة من بين أربع بطاقات مرقمة بالأرقام من ٢ إلى ٥ وملاحظة الرقم المكتوب على البطاقة.

٢ اختيار أحد أرقام العدد ٢٦٣٤٥

٣ اختيار عدد أولى ينحصر بين ١٠ ، ٢٠

٤ اشتراك الأهلى والزمالك والإسماعيلى فى دورة ثلاثية وملاحظة :
أولاً : الفائز بها .
ثانياً : ترتيب الفرق الثلاثة.

٥ إلقاء ثلاث قطع نقود متميزة مرة واحدة وملاحظة تتابع ظهور الصور والكتابات.

٦ الحصول على عدد مكون من رقمين مختلفين من الأرقام ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤

٧ الحصول على عدد مكون من رقمين من الأرقام ٠ ، ١ ، ٢

٨ كيس به ٤ كرات واحدة حمراء والثانية بيضاء والثالثة سوداء والرابعة صفراء ،
والتجربة هى سحب كرتين واحدة بعد الأخرى وملاحظة لونهما :

أولاً : مع الإحلال (إرجاع الكرة الأولى قبل سحب الثانية) .
ثانياً : بدون إحلال.

٩ التسديد على هدف ٣ مرات على الأكثر بحيث نتوقف عن التسديد عند إصابته.

١٠ إلقاء حجر نرد مرة واحدة وملاحظة العدد الظاهر على الوجه العلوى فإذا ظهر عدد أقل من ٦ تلقى قطعة نقود مرة واحدة ، وإذا ظهر العدد ٦ تلقى قطعة نقود مرتين متتاليتين.

١١ إلقاء قطعة نقود ثم حجر نرد فيه وجهان يحملان الرقم ١ ، ووجهان يحملان الرقم ٢

ووجهان يحملان الرقم ٣ ، وملاحظة ما يظهر على وجهيهما العلويين.

١٢ صندوق به ثلاث كرات متماثلة ومارقمة من ١ إلى ٣ سُحبت كرتان الواحدة بعد

الأخرى مع إعادة الكرة المسحوبة قبل سحب الثانية وملاحظة حاصل ضرب الخطين المكتوبين على الكرتين.

١٣ إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات متتالية وملاحظة عدد الصور.

١ في تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة وملاحظة العدد الظاهر على الوجه العلوي اكتب فضاء العينة ف ثم عبر عن كل من الأحداث الآتية ، مبيناً أي هذه الأحداث بسيط وأيها مؤكد وأيها مستحيل :

- | | |
|--|----------------------------------|
| ١ حدث «ظهور الرقم ٤». | ٢ حدث «عدم ظهور الرقم ٥». |
| ٣ حدث «ظهور عدد أكبر من ٣». | ٤ حدث «ظهور عدد أصغر من ٨». |
| ٥ حدث «ظهور عدد يقبل القسمة على ٧». | ٦ و حدث «ظهور عدد أولي». |
| ٧ حدث «ظهور عدد فردي أولي». | ٨ ل حدث «ظهور عدد زوجي أو أولي». |
| ٩ حدث «ظهور عدد ليس مربعاً كاملاً». | |
| ١٠ س حدث «ظهور عدد يحقق المعادلة : $s - (s - 2) = 10$ ». | |
| ١١ ص حدث «ظهور عدد يحقق المتباينة : $s \geq 4$ ». | |

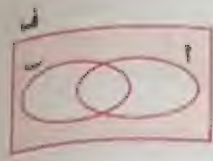
٢ حقيبة بها ٢٠ بطاقة متماثلة ومرقمة من ١ إلى ٢٠ ، سحب بطاقة واحدة عشوائياً ولوخط العدد المسجل على البطاقة المسحوبة ، اكتب الأحداث الآتية :

- | |
|---|
| ١ حدث «العدد المسجل زوجي وأكبر من ١٠». |
| ٢ ب حدث «العدد المسجل عامل من عوامل ١٢». |
| ٣ ح حدث «العدد المسجل فردي ويقبل القسمة على ٣». |
| ٤ د حدث «العدد المسجل مضاعف للعددين ٢ ، ٥». |
| ٥ هـ حدث «العدد المسجل أولي». |
| ٦ و حدث «العدد المسجل يحقق المتباينة : $5 - s - 2 \geq 17$ ». |

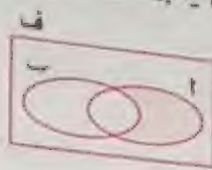
٢ في تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة وملاحظة العدد الظاهر على الوجه العلوي ، اكتب فضاء العينة (ف) ثم عيّن كلّاً من الأحداث الآتية :

- | | |
|-------------------------------|------------------------------|
| ١ حدث «ظهور عدد فردي». | ٢ ب حدث «ظهور عدد أولي». |
| ٣ حدث وقوع ١ و ب معاً. | ٤ حدث وقوع أحدهما على الأقل. |
| ٥ حدث عدم وقوع ١ فقط. | ٦ حدث وقوع ١ فقط. |
| ٧ حدث وقوع ب فقط. | ٨ حدث وقوع أحدهما فقط. |
| ٩ حدث وقوع أحدهما على الأكثر. | |

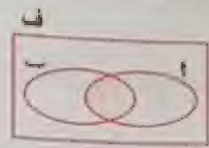
٥ في كل من الأشكال التالية إذا كان ف فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان ١ ، ب حدثين من ف فاكتب الحدث (بدلالة ١ ، ب) الذي يعبر عن الجزء المظلل بشكل فن :



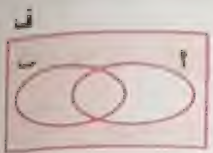
٣



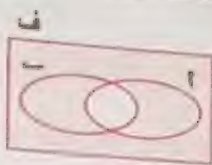
٢



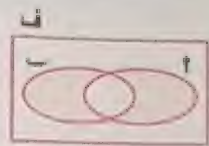
١



٦



٥



٤

٦ في تجربة رمي قطعة نقود مرتين متتاليتين وملاحظة نتائج الصور والكتابات

اكتب فضاء العينة ف ثم عبر عن كل من الأحداث الآتية :

١ حدث «الحصول على كتابة في الرمية الأولى».

٢ ب حدث «الحصول على كتابة في إحدى الرميتين فقط».

٣ ح حدث «الحصول على صورة في الرمية الأولى أو كتابة في الرمية الثانية».

٤ د حدث «عدم ظهور صورة».

٥ هـ حدث «ظهور نفس الشيء في الرميتين».

٦ و حدث «ظهور شيء مختلف في الرميتين».

٧ ألقيت قطعة نقود مرتين متتاليتين ولوحظ نتائج الصور والكتابات ،

اكتب فضاء العينة لهذه التجربة ثم عين الأحداث التالية :

١ حدث «ظهور صورة واحدة بالضبط».

٢ ب حدث «ظهور صورة على الأقل».

٣ ح حدث «ظهور صورة على الأكثر».

٤ د حدث «ظهور صورتين بالضبط».

٥ هـ حدث «ظهور أكثر من صورتين».

ثم وضح أيًا من هذه الأحداث يكون حدثًا أوليًا (بسيطًا).

٨ عند إلقاء قطعة نقود عدة مرات وتوقفت التجربة عند ظهور صورة أو ٣ كتابات اكتب فضاء النواتج ثم عيّن الأحداث الآتية :

- (١) حدث «ظهور صورة على الأقل»
(٢) ب حدث «ظهور صورة على الأقل»
(٣) ح حدث «ظهور كتابتين على الأقل»
(٤) د حدث «ظهور صورتين على الأقل»

٩ عند إلقاء قطعة نقود عدة مرات وتتوقف التجربة عند ظهور صورتين أو كتابتين. اكتب فضاء النواتج ثم عيّن الأحداث الآتية :

- (١) أ حدث «ظهور صورة على الأقل»
(٢) ب حدث «ظهور كتابتين على الأقل»
(٣) ح حدث «ظهور كتابة على الأقل»

١٠ من مجموعة الأرقام { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } كوّن عدداً من رقمين مختلفين.

مثل فضاء النواتج ف بشكل شجرة ، ثم اكتب ف و عيّن منها الأحداث الآتية :

- (١) أ حدث «أن يكون رقم الآحاد فردياً»
(٢) ب حدث «أن يكون رقم العشرات فردياً»
(٣) ح حدث «أن يكون كلا الرقمين فردياً»
(٤) د حدث «أن يكون رقم الآحاد أو رقم العشرات فردياً»
(٥) هـ حدث «مجموعة الأعداد التي بها الآحاد ضعف العشرات»

١١ حقيبة بها ٣ كرات حمراء ، ٣ كرات بيضاء. سحبت منها عشوائياً ٣ كرات الواحدة بعد الأخرى بدون إحلال. اكتب فضاء العينة ثم اكتب الأحداث الآتية :

- (١) أ حدث «الحصول على كرتين حمراوين على الأقل»
(٢) ب حدث «الحصول على كرتين بيضاوين على الأقل»
(٣) ح حدث «الحصول على كرتين بالضبط من لون واحد»
(٤) د أ ب ح
(٥) ب ح
(٦) ح أ

١٢ سحبت بطاقتان الواحدة بعد الأخرى من بين ٨ بطاقات متماثلة ومرقمة من ١ إلى ٨ مع إعادة البطاقة المسحوبة أولاً قبل سحب البطاقة الثانية ، ما عدد عناصر فضاء العينة ؟ وإذا كان :

- (١) أ حدث «العدد في السحبة الثانية ثلاثة أمثال العدد في السحبة الأولى»
(٢) ب حدث «مجموع العددين أكبر من ١٣»

اكتب كلاً من أ ، ب هل أ ، ب حدثان متنافيان ؟ فسر ذلك.

١٣ في تجربة إلقاء حجر نرد مرتين متتاليتين وملاحظة العدد الظاهر على الوجه العلوي في كل مرة ارسم شكلاً هندسياً لفضاء العينة ف ووضح عليه كلاً من الأحداث الآتية :

- ١ حدث «ظهور العدد ٣ في الرمية الأولى».
- ٢ حدث «ظهور العدد ٣ في الرمية الثانية».
- ٣ حدث «ظهور العدد ٣ في أي من الرميتين».
- ٤ حدث «ظهور عدد في الرمية الأولى يزيد ٢ عن العدد في الرمية الثانية».
- ٥ حدث «ظهور عدد في الرمية الثانية يزيد ١ عن العدد في الرمية الأولى».

١٤ ألقى حجر نرد مرتين متتاليتين ولوخط العدد الظاهر على الوجه العلوي في كل مرة. عيّن كلاً من الأحداث الآتية :

- | | |
|------------------------------|---------------------------|
| ١ حدث «مجموع العددين ٨». | ٢ حدث «مجموع العددين ١٠». |
| ٣ حدث «المجموع ٨ أو ١٠». | ٤ حدث «المجموع ١٥». |
| ٥ حدث «ظهور عددين متساويين». | |

١٥ في تجربة إلقاء حجرى نرد متميزين وملاحظة العددين الظاهريين على الوجهين العلويين اكتب كلاً من الأحداث الآتية :

- ١ حدث «الفرق المطلق بين العددين الظاهريين = ٣».
- ٢ حدث «مجموع العددين الظاهريين يساوي ١٠ على الأقل».
- ٣ حدث «أصغر العددين الظاهريين = ٤».
- ٤ $X \cap Y$
- ٥ $X \cap Y$
- ٦ حدث «أكبر العددين الظاهريين ≥ ٣ ».
- ٧ حدث «أكبر العددين الظاهريين ≤ ٥ ».

وضح كلاً من A ، E ، F على الشكل الهندسي لفضاء العينة ف

١٦ ألقى قطعة نقود معدنية ثم حجر نرد لملاحظة وجه قطعة النقود والعدد الظاهر على الوجه العلوي لحجر النرد.

اكتب فضاء النواتج ثم اكتب كلاً من الأحداث الآتية :

- | | |
|-------------------------------|---------------------------------|
| ١ حدث «ظهور كتابة وعدد فردى». | ٢ حدث «ظهور صورة وعدد زوجي». |
| ٣ حدث «ظهور عدد أولى». | ٤ حدث «العدد الظاهر أكبر من ٣». |

١٧ ألقيت قطعة نقود ثم حجر نرد ولوحظ الوجه العلوي لقطعة النقود والعدد الظاهر على الوجه العلوي لحجر النرد،

مثل فضاء العينة بشكل شجري ثم أوجد الأحداث الآتية :

- ١ أ حدث «ظهور كتابة وعدد زوجي».
- ٢ ب حدث «ظهور صورة وعدد فردي».
- ٣ ج حدث «وقوع الحدث أ ووقوع الحدث ب».
- ٤ د حدث «وقوع الحدث أ فقط».
- ٥ هـ حدث «عدم وقوع أ أو عدم وقوع ب».

١٨ عند إلقاء قطعة نقود إذا كان الناتج صورة فسوف تلقى قطعة النقود مرة ثانية وتتوقف التجربة ، أما إذا كان الناتج كتابة في المرة الأولى فسوف يلقي حجر نرد مرة واحدة، اكتب فضاء العينة لتلك التجربة ثم اكتب كلاً من الأحداث الآتية :

- ١ أ حدث «ظهور كتابة وعدد زوجي».
- ٢ ب حدث «ظهور صورة واحدة على الأقل».
- ٣ ج حدث «ظهور كتابة وعدد أولي».

١٩ ألقى حجر نرد فإذا حدث وكان العدد الظاهر على الوجه العلوي للحجر عدداً زوجياً فسوف تلقى قطعة نقود مرة واحدة أما إذا كان العدد الظاهر فردياً فإن قطعة النقود سوف تلقى مرتين. اكتب فضاء العينة لتلك التجربة ثم اكتب كلاً من الأحداث الآتية :

- ١ أ حدث «ظهور عدد فردي وصورة واحدة على الأقل».
- ٢ ب حدث «ظهور عدد زوجي وكتابة».



الدرس

2

مسلمات وقوانين الاحتمال - حساب الاحتمال

إذا كان لدينا فضاء عينة لتجربة عشوائية ما (ف) فإنه يمكننا تعريف مجموعة من الأحداث على هذا الفضاء ، ونستطيع أن نعبر عن مدى إمكانية وقوع أى حدث منها بصورة عددية بما يسمى احتمال الحدث ، وهو يحقق المسلمات الثلاث الآتية :

مسلمات الاحتمال

١ لكل حدث $A \subset F$ يوجد عدد حقيقى يسمى احتمال الحدث $P(A)$ ويرمز له بالرمز $P(A)$ حيث :

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

$$P(\emptyset) = 0 \text{ أى أن } [0, 1]$$

٢ $P(F) = 1$ أى أن احتمال وقوع الحدث المؤكد = ١

٣ إذا كان A, B حدثين متنافيين من فضاء العينة F فإن :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

ويمكن تعميم هذه القاعدة لعدة أحداث متنافية (مثنى مثنى) A_1, A_2, \dots, A_n ، أى فيكون :

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

أي أن احتمال وقوع الحدث المستحيل = صفر

$$L(\emptyset) = \text{صفر}$$

حيث Ω هو الحدث المكمل للحدث A

$$L(\Omega) = 1 - L(A)$$

$$L(A \cup B) = L(A) + L(B) - L(A \cap B)$$

حيث A, B أي حدثين من فضاء العينة Ω (ليسا بالضرورة حدثين متنافيين)

$$L(B - A) = L(B) - L(A \cap B)$$

إذا كان $A \supset B$ فإن $L(A) \geq L(B)$ حيث A, B حدثان من نفس فضاء العينة.

الجدول الآتي يلخص لنا احتمالات بعض الأحداث ، كما يوضح التعبير اللفظي عنها وتمثيلها بشكل فن :

تمثيل الحدث بشكل فن	التعبير عنه لفظيًا	احتمال الحدث
	* احتمال وقوع الحدث المؤكد = 1	$L(\Omega)$
	* احتمال وقوع الحدث المستحيل = صفر	$L(\emptyset)$
	* احتمال وقوع الحدث A	$L(A)$
	* احتمال الحدث المكمل للحدث A * احتمال عدم وقوع الحدث A	$L(\Omega - A) = L(\Omega) - L(A)$
	* احتمال وقوع A ، B معًا.	$L(A \cap B)$
	* احتمال وقوع A أو B أو كليهما. * احتمال وقوع أحدهما على الأقل. * احتمال وقوع أي من الحدثين.	$L(A \cup B)$

لأحداث على

ية بما يسمى

، (A) حيث :

أ. فيكون :

	* احتمال وقوع A وعدم وقوع B * احتمال وقوع A فقط.	$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$
	* احتمال عدم وقوع الحدثين معاً. * احتمال وقوع أحدهما على الأكثر.	$P(\bar{A} - B) = P(\bar{A}) - P(A \cap B)$
	* احتمال عدم وقوع أى من الحدثين. * احتمال عدم وقوع A وعدم وقوع B	$P(A \cap B) = P(A) - P(A - B)$
	* احتمال وقوع B أو عدم وقوع A * احتمال عدم وقوع A فقط.	$P(\bar{A} \cup B) = P(\bar{A}) + P(A \cap B)$
	* احتمال وقوع أحد الحدثين دون الآخر. * احتمال وقوع أحد الحدثين فقط.	$P[(A - B) \cup (B - A)] = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$

حساب الاحتمال

إذا كان فضاء عينة لتجربة عشوائية ما جميع نواتجها (الأحداث الأولية) متساوية الإمكانات ، فإن احتمال وقوع أى حدث $A \subset F$ يعطى بالقانون :

$$P(A) = \frac{\text{عدد النواتج التي تؤدي إلى وقوع الحدث } A}{\text{عدد جميع النواتج الممكنة}} = \frac{\text{عدد عناصر } A}{\text{عدد عناصر } F} = \frac{n(A)}{n(F)}$$

فمثلاً :

إذا كان لدينا صندوق به ٢٤ تفاحة منها ٤ تفاحات تالفة وسحبنا من الصندوق تفاحة واحدة بطريقة عشوائية ، فإن احتمال أن تكون التفاحة المسحوبة تالفة = $\frac{\text{عدد التفاحات التالفة}}{\text{عدد التفاحات في الصندوق}} = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$

ملاحظات :

١ في أى تجربة عشوائية تعتمد على إلقاء حجر نرد أو قطعة نقود فإننا نعتبر أن حجر النرد أو قطعة النقود منتظمة تماماً ما لم ينص على خلاف ذلك.

٢ في أى تجربة عشوائية تعتمد على اختيار عنصر من مجموعة بها عدد محدود من العناصر فإننا نعتبر أن الاختيار يتم بطريقة عشوائية أى أن جميع عناصر فضاء العينة F يكون لها قيم احتمالية متساوية (نفس فرص الحدوث).

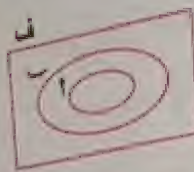
ملاحظات هامة عند حل المسائل

١ إذا كان $A \supset B$ فإن :

$$P(A \cap B) = P(A)$$

$$P(B) = P(A \cup B) - P(A)$$

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$



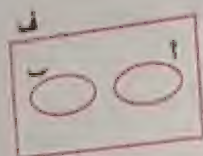
$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

٢ إذا كان A ، B حدثين متنافيين فإن :

$$P(A \cap B) = 0$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$P(A - B) = P(A)$$



$$P(A - B) = P(A)$$

$$P(A) = \frac{1}{4}$$

فإن

$$P(A) = P(B)$$

إذا كان

$$P(A) = \frac{1}{4} \quad P(B) = \frac{1}{4}$$

$$P(A \cup B) = \frac{1}{2}$$

٤ قانونا «دي مورجان» :

$$P(A \cup B) = 1 - P(A - B)$$

$$P(A \cap B) = 1 - P(A - B)$$

ولذلك نجد أن :

$$P(A \cup B) = 1 - P(A - B)$$

$$P(A \cap B) = 1 - P(A - B)$$

٥ لاحظ الفرق بين التعبيرات الآتية :

$$P(A \cup B) = 1 - P(A - B)$$

$$P(A \cap B) = 1 - P(A - B)$$

$$P(A \cup B) = 1 - P(A - B)$$

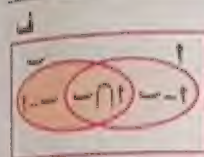
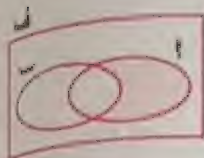
$$\bar{A} - \bar{B} = A \cap B = B \cap A = B - \bar{A} \quad (6)$$

ولذلك نجد أن :

$$(B \cap A) \cup (A - B) = (B - \bar{A}) \cup (B - \bar{A}) = (B \cap A) \cup (B - \bar{A})$$

$$(B \cap A) \cup (A - B) = (B - \bar{A}) \cup (B - \bar{A}) = (B \cap A) \cup (B - \bar{A})$$

$$(B - \bar{A}) \cup (A - B) = (B \cap A) \cup (B - \bar{A}) = (B \cap A) \cup (B - \bar{A})$$



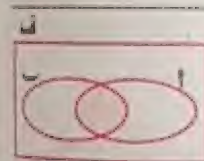
من الشكل المقابل نجد أن :

$$(B \cap A) \cup (B - \bar{A}) = (B - \bar{A}) \cup (B - \bar{A}) = (B \cap A) \cup (B - \bar{A})$$

$$(B \cap A) \cup (B - \bar{A}) = (B - \bar{A}) \cup (B - \bar{A}) = (B \cap A) \cup (B - \bar{A})$$

$$(B \cap A) \cup (B - \bar{A}) = (B - \bar{A}) \cup (B - \bar{A}) = (B \cap A) \cup (B - \bar{A})$$

$$(B \cap A) \cup (B - \bar{A}) = (B - \bar{A}) \cup (B - \bar{A}) = (B \cap A) \cup (B - \bar{A})$$



$$(B \cap A) \cup (B - \bar{A}) = (B - \bar{A}) \cup (B - \bar{A}) = (B \cap A) \cup (B - \bar{A})$$

$$(B \cap A) \cup (B - \bar{A}) = (B - \bar{A}) \cup (B - \bar{A}) = (B \cap A) \cup (B - \bar{A})$$

$$(B \cap A) \cup (B - \bar{A}) = (B - \bar{A}) \cup (B - \bar{A}) = (B \cap A) \cup (B - \bar{A})$$



يمكنك دائماً حل مسائل الاحتمالات باستخدام أشكال فن بجانب القوانين والجدول السابقين.

مثال ١

إذا كان س، ص حدثين من فضاء عينة ف وكان : $L(S) = 35$ ، $L(\bar{S}) = 48$ ، $L(S \cup \bar{S}) = 6$ ،

فأوجد :	١ $L(S)$ ، $L(\bar{S})$	٢ $L(S \cap \bar{S})$
	٣ $L(S \cap S)$	٤ $L(S \cap \bar{S})$

$$L(\bar{S}) = L - 1 = L(S) - 1 = 0.35 - 1 = -0.65$$

$$L(S) = L - 1 = L(\bar{S}) - 1 = 0.48 - 1 = -0.52$$

$$\therefore L(S \cup \bar{S}) = L(S) + L(\bar{S}) - L(S \cap \bar{S})$$

$$\therefore 0.6 = 0.35 + 0.48 - L(S \cap \bar{S})$$

$$\therefore L(S \cap \bar{S}) = 0.6 - 0.35 - 0.48 = -0.23$$

$$L(S \cap S) = L(S - \bar{S}) = L(S) - L(S \cap \bar{S})$$

$$= 0.35 - (-0.23) = 0.58$$

$$L(\bar{S} \cap \bar{S}) = L(\bar{S} \cup S) - 1 = L(\bar{S} \cup S) - 1 = 0.6 - 1 = -0.4$$

$$L(\bar{S} \cap S) = L(S \cap \bar{S}) = -0.23$$

مثال ٢

إذا كان P ، S حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان $L(P) = L(\bar{P})$

$$L(P \cap \bar{P}) = 0, \quad L(P) = \frac{1}{16}, \quad L(\bar{P}) = \frac{5}{8}$$

$L(P - \bar{P})$ [3]	$L(P \cup \bar{P})$ [2]	$L(P)$ [1]
$L(\bar{P} - P)$ [5]	$L(\bar{P} \cup P)$ [4]	$L(\bar{P})$ [5]

$$\therefore L(P) = \frac{1}{4}$$

$$\therefore L(\bar{P}) = \frac{5}{8}$$

$$L(P \cap \bar{P}) = \frac{1}{4} \times \frac{5}{8} = \frac{5}{32}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{16} - \frac{5}{32} + \frac{1}{4} = L(P \cap \bar{P}) - L(P) + L(P) = L(P \cup \bar{P})$$

$$\frac{7}{16} = \frac{1}{16} - \frac{1}{4} = L(P \cap \bar{P}) - L(P) = L(\bar{P} - P)$$

$$\frac{9}{16} = \frac{7}{16} - 1 = L(\bar{P} - P) - 1 = L(\bar{P} - P) = L(\bar{P} \cup P)$$

$$\frac{1}{16} = L(P \cap \bar{P}) = L(P \cap \bar{P})$$

مثال ٣

إذا كان A ، B حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان $P(A) = \frac{1}{4}$ ، $P(B) = \frac{1}{3}$ ، $P(A \cap B) = \frac{1}{12}$ أوجد قيمة $P(A \cup B)$ إذا كان :

١ A ، B حدثين متناقضين. ٢ $A \supset B$ ٣ $P(A \cap B) = \frac{1}{12}$

الحل

١ $\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$
 ٢ $\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{5}{6}$
 ٣ $\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{5}{6}$

١ $\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{5}{6}$
 ٢ $\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{5}{6}$
 ٣ $\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{5}{6}$

١ $\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{5}{6}$
 ٢ $\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{5}{6}$
 ٣ $\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{5}{6}$

١ $\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{5}{6}$
 ٢ $\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{5}{6}$
 ٣ $\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{5}{6}$

١ $\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{5}{6}$
 ٢ $\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{5}{6}$
 ٣ $\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{5}{6}$

١ $\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{5}{6}$
 ٢ $\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{5}{6}$
 ٣ $\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{5}{6}$

مثال ٤

إذا كان A ، B حدثين من فضاء عينة وكان $P(A) = 0.5$ ، $P(B) = 0.6$ ، $P(A \cap B) = 0.4$ أوجد :

- ١ احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل.
- ٢ احتمال وقوع أحد الحدثين على الأكثر.
- ٣ احتمال وقوع الحدث B وعدم وقوع الحدث A .
- ٤ احتمال عدم وقوع الحدث A .
- ٥ احتمال عدم وقوع أي من الحدثين.
- ٦ احتمال وقوع أحد الحدثين دون الآخر.

الحل

١ احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل $= P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.5 + 0.6 - 0.4 = 0.7$

٢ احتمال وقوع أحد الحدثين على الأكثر $= P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.5 + 0.6 - 0.4 = 0.7$

٣ احتمال وقوع الحدث B وعدم وقوع الحدث A $= P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = 0.6 - 0.4 = 0.2$

٤ احتمال عدم وقوع الحدث A $= P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - 0.5 = 0.5$

٥ احتمال عدم وقوع أي من الحدثين $= P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.7 = 0.3$

٦ احتمال وقوع أحد الحدثين دون الآخر $= P(A - B) + P(B - A) = (0.5 - 0.4) + (0.6 - 0.4) = 0.1 + 0.2 = 0.3$

$$\therefore (ف) = 4$$

$$\therefore (1) = \frac{1}{4}$$

$$\therefore (2) = \frac{2}{4}$$

$$\therefore (3) = \frac{2}{4}$$

$$\therefore (4) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$F = \{(ص، ص)، (ص، ك)، (ك، ص)، (ك، ك)\}$$

$$1 = \{(ص، ص)\}$$

$$2 = \{(ص، ص)، (ص، ك)، (ك، ص)\}$$

$$3 = \{(ص، ص)، (ص، ك)، (ك، ص)، (ك، ك)\}$$

$$4 = \{(ص، ك)، (ك، ص)\}$$

مثال ٧

سحبت بطاقة عشوائياً من بين ٣٠ بطاقة مرقمة بالأرقام من ١ إلى ٣٠. أوجد احتمالات الأحداث الآتية:

$$1 \text{ } \frac{1}{30} \text{ البطاقة المسحوبة تحمل عدداً يقبل القسمة على ٥}$$

$$2 \text{ } \frac{1}{30} \text{ البطاقة المسحوبة تحمل عدداً يقبل القسمة على ٧}$$

$$3 \text{ } \frac{2}{30} \text{ البطاقة المسحوبة تحمل عدداً يقبل القسمة على ٥ ، ٧}$$

$$4 \text{ } \frac{1}{30} \text{ البطاقة المسحوبة تحمل عدداً يقبل القسمة على ٥ ، ٧}$$

$$5 \text{ } \frac{1}{30} \text{ البطاقة المسحوبة تحمل عدداً مربعاً كاملاً.}$$

$$F = \{1, 2, 3, 4, \dots, 30\}$$

$$1 = \{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$$

$$2 = \{7, 14, 21, 28\}$$

$$3 = \{1, 2\} \cap \{5, 7\} = \emptyset \text{ (أي أن ١، ٢ حدثان متنافيان).}$$

$$4 = \{5, 7, 10, 14, 15, 20, 21, 25, 28, 30\}$$

$$\therefore (1) = \frac{1}{30}, (2) = \frac{1}{30}, (3) = \frac{1}{30}, (4) = \frac{2}{30} + \frac{1}{30} = \frac{3}{30}$$

$$5 = \{1, 4, 9, 16, 25\}$$

$$\therefore (5) = \frac{5}{30}$$

كيس يحتوي على 9 كرات متماثلة « 4 بيضاء ، 3 حمراء ، 2 سوداء ».
سحب كرة عشوائيًا من الكيس، احسب احتمالات الأحداث الآتية :

1. حدث « الكرة المسحوبة بيضاء ».
2. حدث « الكرة المسحوبة سوداء ».
3. حدث « الكرة المسحوبة ليست سوداء ».
4. حدث « الكرة المسحوبة بيضاء أو حمراء أو سوداء ».

الحل

حيث إن السحب يتم عشوائيًا لذلك فإن الكرات التسع في الكيس تكون لها نفس القيم الاحتمالية وعلى ذلك فإن :

$$\frac{4}{9} = \frac{\text{عدد الكرات البيضاء}}{\text{عدد الكرات بالكيس}} = \frac{3}{9} = \frac{\text{عدد الكرات الحمراء}}{\text{عدد الكرات بالكيس}} = \frac{2}{9} = \frac{\text{عدد الكرات السوداء}}{\text{عدد الكرات بالكيس}}$$

$$\frac{7}{9} = \frac{\text{عدد الكرات البيضاء والسوداء}}{\text{عدد الكرات بالكيس}} = \frac{3+4}{9}$$

$$\frac{6}{9} = \frac{\text{عدد الكرات غير السوداء}}{\text{عدد الكرات بالكيس}} = \frac{2+4}{9}$$

الاحتمال أن

$$1 = \frac{9}{9} = \frac{\text{عدد الكرات البيضاء والحمراء والسوداء}}{\text{عدد الكرات بالكيس}} = \frac{2+3+4}{9}$$

$$1 = \frac{9}{9} = \frac{\text{عدد الكرات البيضاء والحمراء والسوداء}}{\text{عدد الكرات بالكيس}} = \frac{2+3+4}{9}$$

يوجه صيادان نيرانهما إلى ثعلب ، فإذا كان احتمال أن يصيب الأول الثعلب هو $\frac{1}{3}$ واحتمال أن يصيب الثاني الثعلب هو $\frac{2}{3}$ واحتمال أن يصيب الاثنان معًا الثعلب هو $\frac{1}{3}$ فأوجد :

1. احتمال إصابة الثعلب.
2. احتمال عدم إصابة الثعلب.
3. احتمال أن يصيب الصياد الأول وحده الثعلب.

- ٤ احتمال إصابة الثعلب من الصياد الثاني فقط
٥ احتمال إصابة الثعلب من أحدهما فقط
٦ احتمال إصابة الثعلب من أحدهما على الأكثر

الحل

يفرض أن ١ هو حدث أن يصيب الأول الثعلب

٢ هو حدث أن يصيب الثاني الثعلب

فيكون $1 \cap 2$ هو حدث أن يصيب الاثنان معاً الثعلب

$$\frac{1}{4} = P(1)$$

$$\frac{1}{4} = P(2)$$

$$\frac{1}{4} = P(1 \cap 2)$$

$$1 \text{ احتمال إصابة الثعلب } = P(1 \cup 2) = P(1) + P(2) - P(1 \cap 2)$$

$$\frac{2}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} =$$

$$2 \text{ احتمال عدم إصابة الثعلب } = P(\bar{1} \cap \bar{2}) = 1 - \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$3 \text{ احتمال أن يصيب الصياد الأول وحده الثعلب } = P(1 - 2) = P(1) - P(1 \cap 2)$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} =$$

$$4 \text{ احتمال إصابة الثعلب من الصياد الثاني فقط } = P(2 - 1)$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = P(2 - 1)$$

$$5 \text{ احتمال إصابة الثعلب من أحدهما فقط } = P(1 - 2) + P(2 - 1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$6 \text{ احتمال إصابة الثعلب من أحدهما على الأكثر } = P(1 \cup 2) = 1 - P(\bar{1} \cap \bar{2})$$

$$\frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4} =$$

مثال ١٠

ضمم حجر نرد بحيث كانت احتمالات ظهور الأعداد الفردية متساوية واحتمالات ظهور الأعداد الزوجية متساوية وكان احتمال ظهور أي عدد زوجي ضعف احتمال ظهور أي عدد فردي فإذا ألقى هذا الحجر مرة واحدة.

أوجد احتمال ظهور كل من الأعداد الستة للنرد ثم احسب احتمال كل من الحدثين الآتيين

١ حدث الحصول على عدد أولي

٢ حدث الحصول على عدد ≤ 4

$$\{6, 5, 4, 3, 2, 1\} = \text{الفئة ف}$$

$$1 = (ف) ل = (6) ل + (5) ل + (4) ل + (3) ل + (2) ل + (1) ل$$

$$س = (5) ل = (3) ل = (1) ل$$

$$2 = (6) ل = (4) ل = (2) ل$$

$$1 = س + س + س + س + س + س$$

$$\frac{1}{9} = س$$

$$\frac{2}{9} = (6) ل = (4) ل = (2) ل , \frac{1}{9} = (5) ل = (3) ل = (1) ل$$

$$\{5, 3, 2\} = 1$$

$$\frac{4}{9} = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{2}{9} = (5) ل + (3) ل + (2) ل = (\{5, 3, 2\}) ل = (1) ل$$

$$\{6, 5, 4, 3\} = 2$$

$$(6) ل + (5) ل + (4) ل + (3) ل = (\{6, 5, 4, 3\}) ل = (2) ل$$

$$\frac{7}{9} = \frac{2}{9} + \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} =$$

النتيجة

اصطاح على التعبير عن الحدث ل ($\{9\}$) بالصورة ل (9)

ففي المثال السابق ل ($\{1\}$) ، ل ($\{3\}$) وهكذا

مثال 11

قم ٥٠ شخصاً للاختبار لشغل إحدى الوظائف فوجد أن ٣٥ شخصاً يجيدون الإنجليزية ، ١٥ شخصاً يجيدون الفرنسية ، ١٥ شخصاً يجيدون اللغتين الإنجليزية والفرنسية معاً فإذا خيّر أحد المتقدمين عشوائياً فاحسب احتمالات الأحداث الآتية :

أ. حدث «الشخص المختار يجيد إحدى اللغتين على الأقل».

ب. حدث «الشخص المختار لا يجيد أيّاً من اللغتين».

ج. حدث «الشخص المختار يجيد الإنجليزية فقط».

د. حدث «الشخص المختار يجيد إحدى اللغتين فقط».

هـ. حدث «الشخص المختار يجيد لغة واحدة على الأكثر من الإنجليزية والفرنسية».

الحل

∴ عدد الأشخاص الذين يجيدون الإنجليزية = 35 شخصاً.
 ، عدد الأشخاص الذين يجيدون الإنجليزية والفرنسية معاً = 15 شخصاً.
 ∴ عدد الأشخاص الذين يجيدون الإنجليزية فقط = 51 - 35 = 16 شخصاً.
 بالمثل عدد الأشخاص الذين يجيدون الفرنسية فقط = 15 - 20 = 5 أشخاص.
 ∴ عدد الأشخاص الذين لا يجيدون أيّاً من اللغتين = 50 - (15 + 5 + 20) = 10 أشخاص.



ويمكن توضيح هذه الأعداد بالاستعانة بشكل فن المقابل.
 حيث S تمثل مجموعة الأشخاص الذين يجيدون الإنجليزية
 وعددهم 35 شخصاً ، ص تمثل مجموعة الأشخاص الذين

يجيدون الفرنسية وعددهم 20 شخصاً فيكون $S \cap V$ تمثل مجموعة الأشخاص الذين
 يجيدون اللغتين معاً وعددهم 15 شخصاً ، F تمثل مجموعة الأشخاص المتقدمين للاختبار
 وعددهم 50 شخصاً منهم 10 أشخاص لا يجيدون أيّاً من اللغتين.

$$1) \quad \frac{4}{5} = \frac{\text{عدد الأشخاص الذين يجيدون إحدى اللغتين على الأقل}}{\text{عدد المتقدمين}} = \frac{15 + 5 + 20}{50} = \frac{40}{50} = \frac{4}{5}$$

لاحظ أن

$$\frac{4}{5} = \frac{S \cup L}{F}$$

$$\therefore \frac{4}{5} = \frac{S \cup L}{F} \Rightarrow S \cup L = \frac{4}{5} F = \frac{4}{5} \times 50 = 40$$

$$\frac{4}{5} = \frac{40}{50} = \frac{15}{50} + \frac{20}{50} + \frac{35}{50} =$$

$$2) \quad \frac{1}{5} = \frac{\text{عدد الأشخاص الذين لا يجيدون أيّاً من اللغتين}}{\text{عدد المتقدمين}} = \frac{10}{50} = \frac{1}{5}$$

لاحظ أن

$$\frac{1}{5} = \frac{10}{50} = \frac{1}{5} \Rightarrow 10 = \frac{1}{5} \times 50 = 10$$

$$3) \quad \frac{2}{5} = \frac{\text{عدد الأشخاص الذين يجيدون الإنجليزية فقط}}{\text{عدد المتقدمين}} = \frac{16}{50} = \frac{2}{5}$$

لاحظ أن

$$\frac{2}{5} = \frac{16}{50} = \frac{2}{5} \Rightarrow 16 = \frac{2}{5} \times 50 = 16$$

$$\therefore \frac{2}{5} = \frac{16}{50} = \frac{15}{50} + \frac{1}{50} = \frac{15}{50} + \frac{1}{50} = \frac{16}{50}$$

$$\begin{aligned} \text{ل (أ)} &= \frac{\text{عدد الأشخاص الذين يجيدون إحدى اللغتين فقط}}{\text{عدد المتقدمين}} = \frac{5 + 20}{50} = \frac{25}{50} = \frac{1}{2} \\ \text{ل (ب)} &= \frac{\text{عدد الأشخاص الذين يجيدون لغة واحدة على الأكثر}}{\text{عدد المتقدمين}} = \frac{10 + 5 + 20}{50} = \frac{35}{50} = \frac{7}{10} \end{aligned}$$

لاحظ أن ١ هو الحدث المكمل لحدث «الشخص المختار يجيد اللغتين معاً»
أى مكمل للحدث $S \cap V$ ص

$$\therefore \text{ل (ب)} = 1 - \text{ل (س} \cap \text{ص)} = 1 - \frac{15}{50} = \frac{35}{50} = \frac{7}{10}$$

مثال ١١

بلغ عدد زوار أحد المعارض الفنية في أحد الأيام ١٢٠ زائراً موزعين كما في الجدول المقابل :
إذا اختير عشوائياً أحد الزوار. فاحسب احتمالات الأحداث الآتية :

عربي	أجنبي	مجموع
٤٨	١٦	٦٤
٣٢	٢٤	٥٦
٨٠	٤٠	١٢٠

- ١ حدث «الشخص المختار من الذكور».
- ٢ حدث «الشخص المختار من الأجانب».
- ٣ حدث «الشخص المختار من الذكور الأجانب».
- ٤ حدث «الشخص المختار من الذكور أو من الأجانب».

الحل

$$\text{ل (أ)} = \frac{\text{عدد الذكور}}{\text{عدد زوار المعرض}} = \frac{64}{120} = \frac{8}{15}$$

$$\text{ل (ب)} = \frac{\text{عدد الأجانب}}{\text{عدد زوار المعرض}} = \frac{40}{120} = \frac{1}{3}$$

$$\text{ل (ج)} = \frac{\text{عدد الذكور الأجانب}}{\text{عدد زوار المعرض}} = \frac{16}{120} = \frac{2}{15}$$

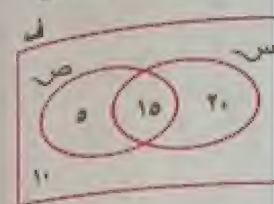
$$\therefore \text{ل (د)} = \text{ل (ج)} \cup \text{ل (ب)} = \frac{2}{15} \cup \frac{1}{3} = \frac{4}{15}$$

$$\text{ل (هـ)} = \text{ل (ب)} \cup \text{ل (ج)} = \frac{1}{3} \cup \frac{2}{15} = \frac{7}{15}$$

$$\therefore \text{ل (و)} = \text{ل (ب)} \cup \text{ل (ج)} = \frac{1}{3} \cup \frac{2}{15} = \frac{7}{15}$$

$$\frac{11}{15} = \frac{2 - 5 + 8}{15} = \frac{2}{15} - \frac{1}{3} + \frac{8}{15} =$$

صفا.
خاص.
(١) = ١٠ أشخاص.



عة الأشخاص الذين
ل المتقدمين للاختبار

$$\frac{1}{3} = \frac{40}{120} = \frac{10}{30}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{40}{120} - 1 = \frac{1}{3}$$

$$\frac{2}{15} = \frac{20}{150} = \frac{10}{75}$$

مثال ١٣

في تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرتين متتاليتين إذا كان الحدث A هو حدث الحصول على عددين أحدهما ≤ 5 ، الحدث B هو حدث الحصول على عددين الفرق المطلق بينهما $= 2$ فاحسب كلا من :

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1. P(A) \cup P(B) & 2. P(A) \cap P(B) & 3. P(A) \cap P(B) \\ \hline 4. P(A \cup B) & 5. P(A - B) & 6. P(B - A) \\ \hline \end{array}$$

الحل

بالنظر إلى الشكل المقابل نجد أن :

١ عدد عناصر الحدث $A = 20$ عنصرًا

$$\frac{20}{36} = \frac{5}{9} = P(A)$$

$$\text{ويكون } P(B) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

٢ عدد عناصر الحدث $B = 8$ عناصر

$$\frac{8}{36} = \frac{2}{9} = P(B)$$

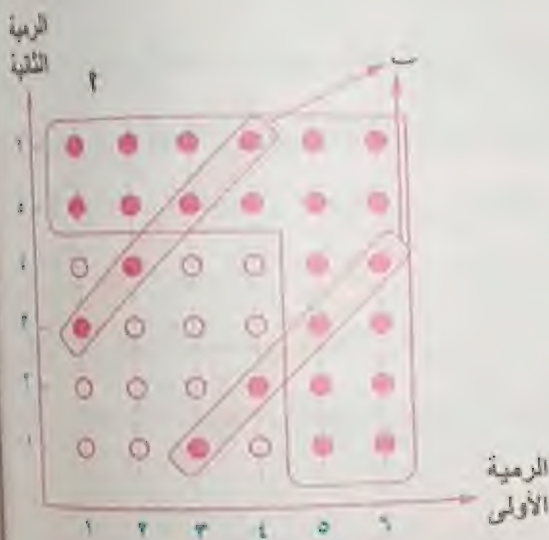
$$\text{ويكون } P(A \cap B) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

٣ عدد العناصر المشتركة بين الحدثين A ، $B = 4$ عناصر

$$\frac{4}{36} = \frac{1}{9} = P(A \cap B)$$

$$4. P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{5}{9} + \frac{2}{9} - \frac{1}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$5. P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{5}{9} - \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$$





من أسئلة الكتاب المدرسي

على مسلمات وقوانين الاحتمال حساب الاحتمال

اختر نفسك

مسائل على مسلمات وقوانين الاحتمال

إذا كان P ، B حدثين من فضاء نواتج لتجربة عشوائية ما ، $P(A) = 0.3$ ،
 $P(B) = 0.8$ ، $P(A \cap B) = 0.2$ احسب كلا من :

- ① $P(A)$ ② $P(A \cup B)$ ③ $P(B - A)$ ④ $P(A \cup B)$

٥/٨ ١/٢ ١/٤ ١/٥

إذا كان P ، B حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ، وكان $P(A) = \frac{1}{4}$ ، $P(B) = \frac{2}{5}$ ،
 $P(A \cup B) = \frac{3}{5}$ فأوجد :

- ① $P(A)$ ، $P(B)$ ② $P(A \cap B)$ ③ $P(A \cup B)$
④ $P(B - A)$ ⑤ $P(A - B)$ ⑥ $P(A \cup B)$

⑦ $P(A \cap B)$ ⑧ $P(A \cup B)$ ⑨ $P(A - B)$ ⑩ $P(B - A)$

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

⑦ احتمال الحدث المؤكد =

- ① \emptyset (ب) ف (ج) صفر (د) ١

② إذا كان احتمال وقوع الحدث P هو $\frac{2}{5}$ فإن احتمال عدم وقوعه =

- ① ٠.٦ (ب) $\frac{1}{5}$ (ج) صفر (د) ٠.٤٠

③ إذا كان P ، B حدثين متنافيين فإن $P(A \cup B) =$

- ① صفر (ب) ١ (ج) ٠.٥ (د) ٠.٥٠

④ إذا كان $P(A) = 0.3$ ، $P(B) = 0.5$ ، $P(A \cap B) = 0.1$ فإن

$P(A \cup B) =$

- ① ٠.٧ (ب) $\frac{1}{5}$ (ج) ٠.٣ (د) ٠.٦

⑤ إذا كان P ، B حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ما وكان $P(A) =$

$P(B) = \frac{2}{5}$ ، $P(A \cup B) = \frac{1}{5}$ فإن $P(A) =$

- ① $\frac{1}{5}$ (ب) $\frac{2}{5}$ (ج) $\frac{3}{5}$ (د) $\frac{1}{2}$

صنوع على عشرين
٢ =

الرمية
النتيجة



$\frac{2}{5} =$

٦ إذا كان : $\emptyset = \bar{A} \cap B$ ، $L(9) = 0.7$ ، $L(7) = 0.4$ ، فإن : $L(A \cup B) = \dots$

(د) 0.9

(ج) 1

(ب) 0.3

(أ) 0.8

٧ إذا كان : $L(A) = 0.4$ ، $L(B) = 0.7$ ، وكان : $L(A \cap B) = 0.5$ ، فإن : $L(\bar{B}) = \dots$

(د) $\frac{4}{5}$

(ج) $\frac{3}{4}$

(ب) $\frac{2}{5}$

(أ) $\frac{1}{5}$

٨ إذا كان : A ، B حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان : $L(A) = 0.5$ ، فإن : $L(A \cup B) = \dots$

(د) 0.9

(ج) 0.5

(ب) 0.3

(أ) 0.2

٩ إذا كان : A ، B حدثين من فضاء العينة ف لتجربة عشوائية وكان : $L(A) = \frac{1}{4}$ ، احتمال وقوع B فقط يساوي 0.2 ، فإن احتمال عدم وقوع B =

(د) 0.9

(ج) 0.7

(ب) 0.3

(أ) 0.1

١٠ إذا كانت F فضاء عينة لتجربة عشوائية ، $F \supset A$ ، وكان : $L(A) = \frac{2}{5}$ ، فإن : $L(A) = \dots$

(د) $\frac{2}{5}$

(ج) $\frac{5}{8}$

(ب) $\frac{3}{8}$

(أ) $\frac{1}{8}$

١١ إذا كان : A ، B حدثين من فضاء النواتج لتجربة عشوائية وكان : $A \supset B$ ، فإن : $L(A) = \dots$

(د) 0.8

(ج) 0.6

(ب) 0.5

(أ) 0.3

١٢ إذا كان : A ، B حدثين متنافيين من فضاء العينة ف وكان : $L(A) = \frac{2}{4}$ ، فإن : $L(A \cup B) = \dots$

(د) $\frac{1}{12}$

(ج) $\frac{2}{5}$

(ب) $\frac{1}{4}$

(أ) $\frac{1}{3}$

١٣ إذا كان : A ، B حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ، وكان : $L(A) = \frac{3}{5}$ ، $L(A \cup B) = 0.45$ ، فأوجد $L(B)$ في كل من الحالات الآتية :

(١) A ، B حدثان متنافيان. (٢) $A \supset B$

(٣) $L(A - B) = 0.2$

إذا كان A, B, C ثلاثة أحداث متنافية مثني مثني وكان:

$$P(A) = 0.12, P(B) = 0.28, P(C) = 0.32 \text{ فأوجد قيمة كل من:}$$

$$\begin{aligned} ① P(A \cup B) & \quad ② P(A - B) & \quad ③ P(A \cap B) \\ ④ P(B - A) & \quad ⑤ P(A \cup B \cup C) & \quad ⑥ P(A \cap B \cap C) \\ ⑦ P(A \cup B) & \end{aligned}$$

$$0.44, 0.12, 0.32, 0.72, 0.1, 0.32, 0.6$$

إذا كان A, B حدثين من فضاء العينة لتجربة عشوائية، وكان $P(A) = \frac{3}{4}$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{8}, P(B - A) = \frac{3}{8} \text{ فأوجد كلاً مما يأتي:}$$

$$\begin{aligned} ① P(B) & \quad ② P(B) & \quad ③ P(A - B) \\ \frac{3}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8} & \end{aligned}$$

إذا كان A, B حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية، وكان $P(A \cap B) = \frac{1}{12}$

$$P(A - B) = \frac{5}{12}, P(B - A) = \frac{1}{4} \text{ فأوجد كلاً من:}$$

$$\begin{aligned} ① P(B) & \quad ② P(B) & \quad ③ P(A \cap B) \\ \frac{1}{4}, \frac{5}{12}, \frac{1}{12} & \end{aligned}$$

إذا كان A, B حدثين من فضاء النواتج لتجربة عشوائية وكان:

$$P(B) = \frac{5}{8}, P(A - B) = \frac{1}{8}, P(B - A) = \frac{3}{4}$$

$$\text{أوجد: } ① P(A) \quad ② P(A \cup B)$$

أ، ب حدثان ينتميان إلى فضاء العينة ف المصاحب لتجربة عشوائية ما

$$P(A \cup B) = 0.8, P(B) = 0.2, P(A \cap B) = 0.2$$

$$\text{أوجد: } ① P(A) \quad ② P(A \cap B) \quad ③ P(A - B)$$

$$0.8, 0.2, 0.2, 0.5$$

إذا كان A, B حدثين من فضاء العينة ف لتجربة عشوائية ما

$$P(A) = \frac{1}{4}, P(B) = \frac{1}{4}, P(A \cup B) = \frac{1}{2}$$

أولاً: أوجد قيمة $P(A \cap B)$ في كل من الحالتين الآتيتين:

$$① A \supset B \quad ② B \supset A$$

ثانياً: إذا كانت $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ فأوجد:

$$P(A \cap B) \quad P(A \cup B) \quad P(A - B) \quad P(B - A)$$

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$$

$$141$$

$$P(A) = 0.4$$

$$P(B) = 0.9$$

$$P(A \cap B) = 0.5$$

$$P(A - B) = \frac{4}{5}$$

$$P(B - A) = 0.5$$

$$P(A \cup B) = 0.9$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

$$P(A - B) = 0.9$$

$$P(B - A) = \frac{3}{5}$$

$$P(A \cup B) = \frac{2}{5}$$

$$P(A \cap B) = \frac{2}{5}$$

$$P(A - B) = \frac{2}{5}$$

$$P(B - A) = \frac{2}{5}$$

$$P(A \cup B) = \frac{2}{5}$$

$$P(A \cap B) = \frac{2}{5}$$

$$P(A - B) = \frac{2}{5}$$

$$P(B - A) = \frac{2}{5}$$

$$P(A \cup B) = \frac{2}{5}$$

$$P(A \cap B) = \frac{2}{5}$$

$$P(A - B) = \frac{2}{5}$$

$$P(B - A) = \frac{2}{5}$$

$$P(A \cup B) = \frac{2}{5}$$

$$P(A \cap B) = \frac{2}{5}$$

$$P(A - B) = \frac{2}{5}$$

$$P(B - A) = \frac{2}{5}$$

$$P(A \cup B) = \frac{2}{5}$$

$$P(A \cap B) = \frac{2}{5}$$

$$P(A - B) = \frac{2}{5}$$

$$P(B - A) = \frac{2}{5}$$

١١ إذا كان $J = \{1\}$ ، $J = \{2\}$ ، $\frac{1}{x} = J$ ، $J = \{1 \cup 2\}$ ، $\frac{y}{x} = J$ حيث x, y حدثان من فضاء تجربة عشوائية أوجد:

فضاء تجربه عشوائيه اوجد:

(1) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ (2) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ (3) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

١٢ ب، ح ثلاثة أحداث متنافية من فضاء العينة ف لتجربة عشوائية ما

بجیٹ ف = ۲ - ۱ ا ح فاذا كان ل (۲) = ل (ب) ، ل (ح) = $\frac{1}{4}$ ل (۲) احسب :

(۶) ل (۲) ل (ب) (۷) ل (۲ - ح)

١٣ إذا كان θ ، θ حدثين من فضاء نواتج لتجربة عشوائية ف، $L(\theta) = \frac{\theta}{\theta}$ (أ)

[illegible]

١٤ إذا كان ف فضاء النواتج لتجربة عشوائية حيث $F = \{a, b, c\}$

وكان $\frac{A}{Y} = \frac{(P)}{(P)} \frac{J}{J}$ ، $\frac{O}{Y} = \frac{(C)}{(C)} \frac{J}{J}$ ، فوجد : $\frac{(C)}{(C)} \frac{J}{J}$

١٥ إذا كان $F = \{a, b, c, d\}$ فضاء عينة لتجربة عشوائية أوجد :

ل (٢) ، ل (٣) إذا كان : ل (٢) = ٣ ل (٣) ، ل (٣) = ٤ ل (٤) ، ل (٤) = ٥ ل (٥) ، ل (٥) = ٦ ل (٦) ، ل (٦) = ٧ ل (٧) ، ل (٧) = ٨ ل (٨) ، ل (٨) = ٩ ل (٩) ، ل (٩) = ١٠ ل (١٠) ، ل (١٠) = ١١ ل (١١) ، ل (١١) = ١٢ ل (١٢) ، ل (١٢) = ١٣ ل (١٣) ، ل (١٣) = ١٤ ل (١٤) ، ل (١٤) = ١٥ ل (١٥) ، ل (١٥) = ١٦ ل (١٦) ، ل (١٦) = ١٧ ل (١٧) ، ل (١٧) = ١٨ ل (١٨) ، ل (١٨) = ١٩ ل (١٩) ، ل (١٩) = ٢٠ ل (٢٠) ، ل (٢٠) = ٢١ ل (٢١) ، ل (٢١) = ٢٢ ل (٢٢) ، ل (٢٢) = ٢٣ ل (٢٣) ، ل (٢٣) = ٢٤ ل (٢٤) ، ل (٢٤) = ٢٥ ل (٢٥) ، ل (٢٥) = ٢٦ ل (٢٦) ، ل (٢٦) = ٢٧ ل (٢٧) ، ل (٢٧) = ٢٨ ل (٢٨) ، ل (٢٨) = ٢٩ ل (٢٩) ، ل (٢٩) = ٣٠ ل (٣٠) ، ل (٣٠) = ٣١ ل (٣١) ، ل (٣١) = ٣٢ ل (٣٢) ، ل (٣٢) = ٣٣ ل (٣٣) ، ل (٣٣) = ٣٤ ل (٣٤) ، ل (٣٤) = ٣٥ ل (٣٥) ، ل (٣٥) = ٣٦ ل (٣٦) ، ل (٣٦) = ٣٧ ل (٣٧) ، ل (٣٧) = ٣٨ ل (٣٨) ، ل (٣٨) = ٣٩ ل (٣٩) ، ل (٣٩) = ٤٠ ل (٤٠) ، ل (٤٠) = ٤١ ل (٤١) ، ل (٤١) = ٤٢ ل (٤٢) ، ل (٤٢) = ٤٣ ل (٤٣) ، ل (٤٣) = ٤٤ ل (٤٤) ، ل (٤٤) = ٤٥ ل (٤٥) ، ل (٤٥) = ٤٦ ل (٤٦) ، ل (٤٦) = ٤٧ ل (٤٧) ، ل (٤٧) = ٤٨ ل (٤٨) ، ل (٤٨) = ٤٩ ل (٤٩) ، ل (٤٩) = ٥٠ ل (٥٠) ، ل (٥٠) = ٥١ ل (٥١) ، ل (٥١) = ٥٢ ل (٥٢) ، ل (٥٢) = ٥٣ ل (٥٣) ، ل (٥٣) = ٥٤ ل (٥٤) ، ل (٥٤) = ٥٥ ل (٥٥) ، ل (٥٥) = ٥٦ ل (٥٦) ، ل (٥٦) = ٥٧ ل (٥٧) ، ل (٥٧) = ٥٨ ل (٥٨) ، ل (٥٨) = ٥٩ ل (٥٩) ، ل (٥٩) = ٦٠ ل (٦٠) ، ل (٦٠) = ٦١ ل (٦١) ، ل (٦١) = ٦٢ ل (٦٢) ، ل (٦٢) = ٦٣ ل (٦٣) ، ل (٦٣) = ٦٤ ل (٦٤) ، ل (٦٤) = ٦٥ ل (٦٥) ، ل (٦٥) = ٦٦ ل (٦٦) ، ل (٦٦) = ٦٧ ل (٦٧) ، ل (٦٧) = ٦٨ ل (٦٨) ، ل (٦٨) = ٦٩ ل (٦٩) ، ل (٦٩) = ٧٠ ل (٧٠) ، ل (٧٠) = ٧١ ل (٧١) ، ل (٧١) = ٧٢ ل (٧٢) ، ل (٧٢) = ٧٣ ل (٧٣) ، ل (٧٣) = ٧٤ ل (٧٤) ، ل (٧٤) = ٧٥ ل (٧٥) ، ل (٧٥) = ٧٦ ل (٧٦) ، ل (٧٦) = ٧٧ ل (٧٧) ، ل (٧٧) = ٧٨ ل (٧٨) ، ل (٧٨) = ٧٩ ل (٧٩) ، ل (٧٩) = ٨٠ ل (٨٠) ، ل (٨٠) = ٨١ ل (٨١) ، ل (٨١) = ٨٢ ل (٨٢) ، ل (٨٢) = ٨٣ ل (٨٣) ، ل (٨٣) = ٨٤ ل (٨٤) ، ل (٨٤) = ٨٥ ل (٨٥) ، ل (٨٥) = ٨٦ ل (٨٦) ، ل (٨٦) = ٨٧ ل (٨٧) ، ل (٨٧) = ٨٨ ل (٨٨) ، ل (٨٨) = ٨٩ ل (٨٩) ، ل (٨٩) = ٩٠ ل (٩٠) ، ل (٩٠) = ٩١ ل (٩١) ، ل (٩١) = ٩٢ ل (٩٢) ، ل (٩٢) = ٩٣ ل (٩٣) ، ل (٩٣) = ٩٤ ل (٩٤) ، ل (٩٤) = ٩٥ ل (٩٥) ، ل (٩٥) = ٩٦ ل (٩٦) ، ل (٩٦) = ٩٧ ل (٩٧) ، ل (٩٧) = ٩٨ ل (٩٨) ، ل (٩٨) = ٩٩ ل (٩٩) ، ل (٩٩) = ١٠٠ ل (١٠٠) ، ل (١٠٠) = ١٠١ ل (١٠١) ، ل (١٠١) = ١٠٢ ل (١٠٢) ، ل (١٠٢) = ١٠٣ ل (١٠٣) ، ل (١٠٣) = ١٠٤ ل (١٠٤) ، ل (١٠٤) = ١٠٥ ل (١٠٥) ، ل (١٠٥) = ١٠٦ ل (١٠٦) ، ل (١٠٦) = ١٠٧ ل (١٠٧) ، ل (١٠٧) = ١٠٨ ل (١٠٨) ، ل (١٠٨) = ١٠٩ ل (١٠٩) ، ل (١٠٩) = ١١٠ ل (١١٠) ، ل (١١٠) = ١١١ ل (١١١) ، ل (١١١) = ١١٢ ل (١١٢) ، ل (١١٢) = ١١٣ ل (١١٣) ، ل (١١٣) = ١١٤ ل (١١٤) ، ل (١١٤) = ١١٥ ل (١١٥) ، ل (١١٥) = ١١٦ ل (١١٦) ، ل (١١٦) = ١١٧ ل (١١٧) ، ل (١١٧) = ١١٨ ل (١١٨) ، ل (١١٨) = ١١٩ ل (١١٩) ، ل (١١٩) = ١٢٠ ل (١٢٠) ، ل (١٢٠) = ١٢١ ل (١٢١) ، ل (١٢١) = ١٢٢ ل (١٢٢) ، ل (١٢٢) = ١٢٣ ل (١٢٣) ، ل (١٢٣) = ١٢٤ ل (١٢٤) ، ل (١٢٤) = ١٢٥ ل (١٢٥) ، ل (١٢٥) = ١٢٦ ل (١٢٦) ، ل (١٢٦) = ١٢٧ ل (١٢٧) ، ل (١٢٧) = ١٢٨ ل (١٢٨) ، ل (١٢٨) = ١٢٩ ل (١٢٩) ، ل (١٢٩) = ١٣٠ ل (١٣٠) ، ل (١٣٠) = ١٣١ ل (١٣١) ، ل (١٣١) = ١٣٢ ل (١٣٢) ، ل (١٣٢) = ١٣٣ ل (١٣٣) ، ل (١٣٣) = ١٣٤ ل (١٣٤) ، ل (١٣٤) = ١٣٥ ل (١٣٥) ، ل (١٣٥) = ١٣٦ ل (١٣٦) ، ل (١٣٦) = ١٣٧ ل (١٣٧) ، ل (١٣٧) = ١٣٨ ل (١٣٨) ، ل (١٣٨) = ١٣٩ ل (١٣٩) ، ل (١٣٩) = ١٤٠ ل (١٤٠) ، ل (١٤٠) = ١٤١ ل (١٤١) ، ل (١٤١) = ١٤٢ ل (١٤٢) ، ل (١٤٢) = ١٤٣ ل (١٤٣) ، ل (١٤٣) = ١٤٤ ل (١٤٤) ، ل (١٤٤) = ١٤٥ ل (١٤٥) ، ل (١٤٥) = ١٤٦ ل (١٤٦) ، ل (١٤٦) = ١٤٧ ل (١٤٧) ، ل (١٤٧) = ١٤٨ ل (١٤٨) ، ل (١٤٨) = ١٤٩ ل (١٤٩) ، ل (١٤٩) = ١٥٠ ل (١٥٠) ، ل (١٥٠) = ١٥١ ل (١٥١) ، ل (١٥١) = ١٥٢ ل (١٥٢) ، ل (١٥٢) = ١٥٣ ل (١٥٣) ، ل (١٥٣) = ١٥٤ ل (١٥٤) ، ل (١٥٤) = ١٥٥ ل (١٥٥) ، ل (١٥٥) = ١٥٦ ل (١٥٦) ، ل (١٥٦) = ١٥٧ ل (١٥٧) ، ل (١٥٧) = ١٥٨ ل (١٥٨) ، ل (١٥٨) = ١٥٩ ل (١٥٩) ، ل (١٥٩) = ١٦٠ ل (١٦٠) ، ل (١٦٠) = ١٦١ ل (١٦١) ، ل (١٦١) = ١٦٢ ل (١٦٢) ، ل (١٦٢) = ١٦٣ ل (١٦٣) ، ل (١٦٣) = ١٦٤ ل (١٦٤) ، ل (١٦٤) = ١٦٥ ل (١٦٥) ، ل (١٦٥) = ١٦٦ ل (١٦٦) ، ل (١٦٦) = ١٦٧ ل (١٦٧) ، ل (١٦٧) = ١٦٨ ل (١٦٨) ، ل (١٦٨) = ١٦٩ ل (١٦٩) ، ل (١٦٩) = ١٧٠ ل (١٧٠) ، ل (١٧٠) = ١٧١ ل (١٧١) ، ل (١٧١) = ١٧٢ ل (١٧٢) ، ل (١٧٢) = ١٧٣ ل (١٧٣) ، ل (١٧٣) = ١٧٤ ل (١٧٤) ، ل (١٧٤) = ١٧٥ ل (١٧٥) ، ل (١٧٥) = ١٧٦ ل (١٧٦) ، ل (١٧٦) =

إذا كان $F = \{a, b, c\}$ فضاء عينة لتجربة عشوائية ما ، وكان :

٢. ل (٢) = ١٥ ل (ب) = ١٢ ل (ج) فأوجد: ل (٩) ، ل (ب) ، ل (ج) . $\frac{2}{11}$ ، $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{3}$.

١٧ إذا كان ٩ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ، وكان ل (٩) = ٠.٦٥ ،

ل (ب) = ۰.۲۵ ، ل (۲-ب) = ۰.۰۵ فاوحد احتمال ۰.۷۰

- ١) وقوع الحدث ب
٢) عدم وقوع الحدث ؟
٣) وقوع الحدث ب فقط.
٤) وقوع أحدهما على الأكثر.
٥) عدم وقوع أى من الحدثين ؟ أو ب
٦) عدم وقوع الحدث ؟ أو وقوع الحدث ب

١٨ إذا كان ٢ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ف ، وكان $P(A) = \frac{1}{4}$ ، $P(B) = \frac{1}{4}$ ، $P(A \cup B) = \frac{5}{8}$ فأوجد :

- ١ احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل.
- ٢ احتمال وقوع أحد الحدثين على الأكثر.
- ٣ احتمال وقوع الحدث ب فقط.
- ٤ احتمال وقوع أحد الحدثين فقط.

$$P(A) = \frac{1}{4}, P(B) = \frac{1}{4}, P(A \cup B) = \frac{5}{8}$$

١٩ إذا كان ٢ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ، وكان احتمال وقوع الحدث $P(A) = 0.5$ ، واحتمال وقوع الحدث $P(B) = 0.6$ واحتمال عدم وقوع الحدثين معاً $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.8$ فأوجد :

- ١ احتمال وقوع الحدث ٢ والحدث ب معاً.
- ٢ احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل.
- ٣ احتمال وقوع الحدث ب وعدم وقوع الحدث ٢

٢٠ إذا كان ٢ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ، وكان احتمال عدم وقوع الحدث $P(\bar{A}) = 0.7$ ، واحتمال عدم وقوع الحدث $P(\bar{B}) = 0.6$ ، واحتمال وقوع أحدهما على الأكثر $P(A \cup B) = 0.9$ فأوجد كلاً مما يأتي :

- ١ احتمال وقوع الحدث ٢
- ٢ احتمال وقوع الحدثين معاً.
- ٣ احتمال وقوع أي من الحدثين.
- ٤ احتمال وقوع الحدث ٢ فقط.
- ٥ احتمال وقوع الحدث ب أو عدم وقوع الحدث ٢

٢١ إذا كان ٢ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية، وكان $P(A) = \frac{2}{3}$ ، $P(B) = \frac{1}{3}$ ، واحتمال حدث وقوع أحدهما على الأكثر يساوي $P(A \cup B) = 0.75$ ، واحتمال حدث وقوع أحدهما على الأقل يساوي $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.6$ فأوجد احتمال كل من الأحداث الآتية :

- ١ احتمال وقوعهما معاً.
- ٢ وقوع أحد الحدثين فقط.
- ٣ وقوع ب أو عدم وقوع ٢

٢٢ ثلاثة خيول ١، ب، ح مشتركة في سباق فإذا كان احتمال فوز ١ ضعف احتمال فوز ب واحتمال فوز ب ضعف احتمال فوز ح علمًا بأن أحد الخيول فقط هو الذي سيفوز بالسباق أوجد :

$$\frac{1}{V} = \frac{1}{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\frac{1}{3}} + \frac{1}{\frac{1}{4}} + \frac{1}{\frac{1}{5}} + \frac{1}{\frac{1}{6}}$$

٢٣ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١) إذا كان ٢ ، ب حدثين من فضاء العينة (ف) لتجربة عشوائية حيث ل (ب) = $\frac{5}{v}$

فإن : $J = (J \cap I) + (J \cap I')$

(1) $\frac{2}{V}$ (ب) $\frac{3}{V}$ (ج) 1 (د) صفر

٢) إذا كان ٢، ٣ حدثين من فضاء العينة (ف) وكان ل (١) : ل (٣) = ٢ : ٣

..... = (٩) ج فان : , ٧ = (٤ ج ٩) ج , ١ = (٤ ج ٩) ج

٠, ٦ (ج) ٠, ٣٢ (ج) ٠, ٤٨ (ب) ٠, ١٦ (١)

(٣) إذا كان ٢ ، ٣ حدثين من أحداث تجربة عشوائية حيث $l = (٢ - ٣) = ٣$.

..... = (س ∩ ق) ∪ : فإن $\frac{1}{5} = (س ∩ ق) ∪$ ، $\frac{4}{15} = (ق - س) ∪$ ،

$$\frac{V}{T} \quad (a) \qquad \frac{V}{T} \quad (b) \qquad \frac{V}{T} \quad (c) \qquad \frac{V}{T} \quad (d)$$

٤) إذا كان P ، B حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ، وكان احتمال وقوع الحدث B وعدم وقوع الحدث $P = 0.18$ ، واحتمال وقوع أحد الحدثين P ، B بالضبط $= 0.43$.
فإن احتمال وقوع P فقط =

٠,٧ (ج) ٠,٦١ (د) ٠,٩ (ب) ٠,٢٥ (ا)

صمم حجر نرد بحيث عند إلقائه تكون احتمالات ظهور الأعداد ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦ متساوية، احتمال ظهور العدد ٦ يساوي ثلاثة أمثال احتمال ظهور العدد ١ فإن احتمال ظهور عدد زوجي =

$$\frac{r}{\lambda} \quad (2) \qquad \frac{r}{\lambda} \quad (3) \qquad \frac{1}{r} \quad (1)$$

٦ في أحد معارض أجهزة الكمبيوتر إذا كان احتمال بيع ٢٠ جهازًا على الأقل يوميًا هو ٠,٧ واحتمال بيع أقل من ٢٣ جهازًا هو ٠,٤ ، فإن احتمال بيع [٢٠ أو ٢١ أو ٢٢ جهازًا] =

- (أ) ٠,١ (ب) ٠,٢ (ج) ٠,٣ (د) ٠,٤

٧ تم حقن عشرة فئران بمادة سامة ولوحظ عدد الفئران التي تموت خلال ١٢ ساعة فإذا كان احتمال أن يموت ستة فئران أو أقل $= ٠,٧$ واحتمال أن يموت ستة فئران بالضبط $= ٠,٣$ ، فإن احتمال أن يموت ستة فئران على الأقل =

- (أ) ٠,٤ (ب) ٠,٥ (ج) ٠,٦ (د) ٠,٨

٨ إذا كان فضاء العينة لتجربة عشوائية هو $\{٢, ٣, ٤, ٥, ٦, ٧, ٨, ٩, ١٠, ١١, ١٢\}$ وكان $L(\{٢\}) = ٠,٣٣$ ، $L(\{٣, ٤\}) = ٠,٤٥$ ، $L(\{٤, ٥, ٦\}) = ٠,٤٤$ ، فإن $L(\{٢\}) =$

- (أ) ٠,٧٧ (ب) ٠,٢٣ (ج) ٠,١١ (د) ٠,٠١

٩ في احتفال أحد الأندية الرياضية بافتتاح مجمع للصالات ، إذا كان احتمال حضور المحافظ ٠,٨ ، واحتمال حضور وزير الشباب والرياضة ٠,٩ ، واحتمال حضورهما معًا ٠,٧٢ أوجد :

١ احتمال حضور المحافظ فقط.

٢ احتمال حضور أحدهما على الأقل.

٣ احتمال عدم حضورهما معًا.

٠,٠٨ ، ٠,٩٨ ، ٠,٣٨

١٠ يصوب لاعبان ٩ ، ب في وقت واحد نحو هدف ما ، فإذا كان احتمال أن يصيب اللاعب أ الهدف هو $\frac{٢}{٥}$ ، واحتمال أن يصيب اللاعب ب الهدف هو $\frac{١}{٤}$ ، واحتمال أن يصيب اللاعبان معًا الهدف هو $\frac{١}{١٠}$ أوجد احتمالات الأحداث الآتية :

١ حدث «إصابة الهدف».

٢ حدث «إصابة الهدف من ب فقط».

٣ حدث «عدم إصابة الهدف».

٤ حدث «إصابة الهدف من أحدهما على الأكثر».

٥ حدث «إصابة الهدف من أحدهما دون الآخر».

١٤٥

عف احتمال فوز ب الذى سيفوز بالسباق.

$\frac{٣}{٧} , \frac{١}{٧} , \frac{١}{٧} , \frac{٣}{٧}$ صفر

ل (ب) $= \frac{٥}{٧}$

(د) صفر

$٣ : ٢ =$

(د) ٠,٦

$٠,٣ =$

(د) $\frac{٧}{٣٠}$

مال وقوع الحدث ب

بالضبط $= ٠,٤٣$

(د) ٠,٧

٥ ، ٤ ، ٣ ، ٢ ، ١

العدد ١

(د) $\frac{٣}{٤}$

B612

٢٦ إذا كان احتمال نجاح طالب في التاريخ هو 0.4 ، واحتمال نجاحه في اللغة العربية هو 0.45 ، واحتمال نجاحه في التاريخ واللغة العربية هو 0.18 أوجد احتمال :

- (١) نجاحه في التاريخ فقط. (٢) رسوبه في المادتين معاً.
(٣) نجاحه في مادة واحدة منهما على الأكثر. (٤) نجاحه في إحدى المادتين على الأقل.
(٥) عدم نجاحه في المادتين معاً.

$$0.22 + 0.33 + 0.82 + 0.67 + 0.89$$

٢٧ إذا كان احتمال نجاح حسن في اختبار الرياضيات هو 0.72 ، واحتمال رسوبه في اختبار الفيزياء هو 0.27 ، وكان احتمال نجاحه في أحد الاختبارين على الأقل هو 0.88 . فأوجد احتمالات الأحداث الآتية :

- (١) نجاح حسن في كلا الاختبارين.
(٢) نجاح حسن في أحد الاختبارين على الأكثر.
(٣) نجاح حسن في أحد الاختبارين دون الآخر.
(٤) رسوب حسن في كلا الاختبارين.

$$0.17 + 0.53 + 0.46 + 0.12$$

٢٨ صمم حجر نرد بحيث كانت احتمالات ظهور الأعداد الفردية متساوية واحتمالات ظهور الأعداد الزوجية متساوية ، وكان احتمال ظهور العدد الزوجي يساوي $\frac{1}{3}$ احتمال ظهور العدد الفردي فإذا ألقى هذا الحجر مرة واحدة. أوجد احتمال ظهور كل عدد من الأعداد الستة ثم احسب احتمال كل من الأحداث الآتية :

- (١) حدث «ظهور عدد أولى غير زوجي».
(٢) حدث «ظهور عدد أقل من ٣».
(٣) حدث «ظهور عدد زوجي أكبر من أو يساوي ٤».

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

٢٩ صمم حجر نرد بحيث يكون احتمال ظهور أي عدد على الوجه العلوي = $\frac{1}{6}$ العدد نفسه حيث $\frac{1}{6}$ ثابت \neq صفر فإذا ألقى هذا الحجر مرة واحدة. أوجد احتمالات الأحداث الآتية :

- (١) حدث «ظهور عدد فردي».
(٢) حدث «ظهور عدد فردي أولى».
(٣) حدث «ظهور عدد فردي أولى».
(٤) حدث «ظهور عدد لا يقبل القسمة على ٣».

$$0.1 + 0.2 + 0.3 + 0.4$$

الربط بالرياضة : صرح مدرب أحد الفرق الرياضية أثناء لقاء صحفي معه بأن احتمال فوز فريقه في مباراة الذهاب ٠,٧ ، واحتمال فوز فريقه في مباراة الإياب ٠,٩ ، وأن احتمال فوزه في المبارتين معاً ٠,٥ . هل يتفق ما صرح به مدرب الفريق مع مفهوم الاحتمال ؟
فسر إجابتك.

٣١ إذا كان ٢ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ، وكان ل (ب) = ٠,٥ ،
ل (٢ ∪ ب) = ٠,٨ ، ل (٢ ∩ ب) = ل (٢) × ل (ب)
فأوجد :

$$\textcircled{1} \text{ ل (٢) } \quad \textcircled{2} \text{ ل (٢ ∪ ب) } \quad \textcircled{3} \text{ ل (٢ ∩ ب) }$$

٣٢ ٢ ، ب حدثان من ف ، ل دالة احتمال على ف ، فإذا كان :

$$\text{ل (٢)} = \text{س} ، \text{ل (ب)} = ٤ - \text{س} ، \text{ل (٢ ∪ ب)} = ٦ - \text{س} - ٤$$

فأوجد قيمة س إذا كان :

$$\textcircled{1} \text{ ٢ ، ب حدثين متنافيين.}$$

$$\textcircled{2} \text{ ب } \supset \text{ ٢}$$

$$\textcircled{3} \text{ ل (٢ ∩ ب) } = \frac{٤}{٥} \text{ س}$$

٣٣ إذا كان ٢ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان :

$$\text{ل (٢ - ب)} = \text{ل (٢ ∩ ب)} ، \text{ل (٢)} = ٧ ، \text{ل (٢ ∪ ب)} = ٦ ، \text{ل (ب)} = \frac{٥}{٦}$$

أوجد كلاً من : ل (٢) ، ل (ب ∩ ٢)

٣٤ إذا كان ٢ ، ب حدثين من فضاء نواتج ف ، ل دالة احتمال على ف بحيث :

$$\text{ل (٢ ∪ ب)} = ٠,٥٨ ، \text{ل (٢ ∩ ب)} = ٠,١٢$$

$$\text{فإذا كان ل (٢ ∩ ب) = ل (٢) × ل (ب)}$$

فأوجد قيمة كل من : ل (٢) ، ل (ب)

ثانيًا مسائل على حساب الاحتمال

١ في تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة وملاحظة العدد الظاهر على الوجه العلوي.

أوجد احتمالات الأحداث الآتية :

- ١ حدث «ظهور الرقم ٥». ٢ حدث «عدم ظهور الرقم ٣».
- ٣ حدث «ظهور عدد أكبر من ٢». ٤ حدث «ظهور عدد أكبر من ٤ أو أقل من ٢».
- ٥ حدث «ظهور عدد أكبر من ٢ وأقل من ٣».
- ٦ حدث «ظهور عدد من عوامل ٦».
- ٧ حدث «ظهور عدد فردي يقبل القسمة على ٣».

$$\frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6}, \frac{6}{6}$$

٢ ألقى حجر نرد منتظم كتب على أوجهه الأعداد ٨، ٩، ١٠، ١١، ١٢، ١٣ ولوحظ العدد على الوجه العلوي. احسب :

(١) احتمال كل من الأحداث التالية :

- ١ حدث «ظهور عدد فردي». ٢ حدث «ظهور عدد أولي».
- ٣ حدث «ظهور عدد زوجي». ٤ حدث «ظهور عدد أكبر من ١٢».
- ٥ حدث «ظهور عدد مكون من رقمين».
- ٦ حدث «ظهور عدد مكون من رقم واحد».
- (ب) $L(A \cup B)$ ، $L(A \cap B)$ ، $L(A \cup C)$ ، $L(A \cap C)$ ، $L(B \cap C)$ ، $L(A \cap B \cap C)$

$$\frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6}, \frac{6}{6}$$

٣ كيس يحتوي على ٢٥ كرة منها ٤ كرات صفراء ، ٧ كرات حمراء ، والباقي أسود اللون ، فإذا سحبت كرة عشوائيًا. فأوجد احتمال أن تكون الكرة المسحوبة :

- ١ سوداء. ٢ صفراء أو سوداء. ٣ ليست صفراء.
- ٤ خضراء. ٥ ليست بيضاء.

$$\frac{1}{25}, \frac{4}{25}, \frac{7}{25}, \frac{11}{25}, \frac{13}{25}$$

٤ مجموعة بطاقات متماثلة ومرقمة من ١ إلى ٣٠ ، سحب منها بطاقة واحدة عشوائياً ولوخط العدد المدون عليها . احسب احتمال أن تكون البطاقة المسحوبة تحمل :

- | | |
|----------------------------------|--------------------------------|
| ١ عددًا يقبل القسمة على ٣ | ٢ عددًا يقبل القسمة على ٥ |
| ٣ عددًا يقبل القسمة على ٣ ، ٥ | ٤ عددًا يقبل القسمة على ٣ أو ٥ |
| ٥ عددًا زوجيًا يقبل القسمة على ٣ | ٦ عددًا فرديًا مكعبًا كاملاً . |
| ٧ عددًا أوليًا أصغر من ١٥ | ٨ عددًا به رقم ٢ أو رقم ٣ |

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{15} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{10} + \frac{1}{3}$$

٥ سحب بطاقة عشوائياً من ٥٠ بطاقة متماثلة ومرقمة من ١ إلى ٥٠ . احسب احتمال أن يكون العدد على البطاقة المسحوبة :

- | | |
|------------------------------------|--|
| ١ مضاعفاً للعدد ٧ | ٢ مربعاً كاملاً . |
| ٣ مضاعفاً للعدد ٧ ومربعاً كاملاً . | ٤ ليس مربعاً كاملاً ، وليس مضاعفاً للعدد ٧ |

$$= \frac{31}{50} + \frac{7}{50} + \frac{7}{50} + \frac{1}{50}$$

٦ صندوق به ٨ بطاقات مرقمة من ١ إلى ٨ ، سحب بطاقة واحدة بعد الأخرى مع الإحلال . أوجد احتمال :

- ١ أن يكون الفرق المطلق بين الرقمين يساوي ٣
٢ أن يكون مجموع الرقمين أقل من ٨

$$= \frac{31}{32} + \frac{5}{32}$$

٧ كيس يحتوي على ٥٠ كرة متماثلة ، ٢٥ كرة منها بيضاء وقرمى بالأرقام من ١ إلى ٢٥ ، ١٥ كرة منها حمراء وقرمى بالأرقام من ١ إلى ١٥ ، والباقي كرات زرقاء وقرمى بالأرقام من ١ إلى ١٠ فإذا سحب كرة عشوائياً من الكيس . احسب احتمال أن تكون الكرة المسحوبة :

- | | |
|----------------------------------|--|
| ١ حمراء أو بيضاء . | ٢ حمراء وتحمل عدداً زوجياً . |
| ٣ تحمل عدداً أقل من أو يساوي ٨ | ٤ تحمل عدداً أقل من أو يساوي ١٢ |
| ٥ تحمل عدداً أكبر من أو يساوي ١٤ | ٦ عليها عدد n حيث $6 \leq n \leq 20$ |

$$= 0.16 + 0.28 + 0.36 + 0.48 + 0.12 + 0.08$$

٨ حقيقة بها ٣ كرات سوداء ، ٣ كرات حمراء ، فإذا سحبنا منها عشوائيًا ٣ كرات بدون إحلال ، فأوجد احتمال كل مما يأتي :

- ١ حدث «الحصول على كرتين حمراوين على الأكثر».
- ٢ حدث «الحصول على كرتين بالضبط من نفس اللون».
- ٣ حدث «الحصول على كرتين حمراوين على الأقل».
- ٤ حدث «الحصول على كرتين بالضبط حمراوين متتاليتين».

٩ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ فصل به ٤٢ طالبًا نجح منهم في آخر العام ٣٥ طالبًا فإذا اختير طالب عشوائيًا فإن احتمال أن يكون راسبًا هو

- (أ) $\frac{5}{6}$ (ب) $\frac{1}{6}$ (ج) صفر (د) $\frac{1}{3}$

٢ إذا ألقى حجر نرد منتظم مرة واحدة فإن احتمال ظهور عدد زوجي غير أولى =

- (أ) $\frac{1}{6}$ (ب) $\frac{1}{3}$ (ج) $\frac{1}{6}$ (د) $\frac{5}{6}$

٣ ألقى حجر نرد منتظم مرة واحدة فإذا كان الحدث ١ هو «ظهور عدد فردي» ، والحدث ٢ هو «ظهور عدد أقل من ٥» فإن احتمال وقوع أحدهما على الأقل هو

- (أ) $\frac{1}{6}$ (ب) $\frac{1}{3}$ (ج) $\frac{5}{6}$ (د) $\frac{1}{6}$

٤ إذا ألقيت قطعة نقود منتظمة مرة واحدة فإن احتمال ظهور صورة أو كتابة يساوي

- (أ) صفر (ب) $\frac{1}{6}$ (ج) $\frac{1}{3}$ (د) $\frac{1}{6}$

٥ إذا ألقى حجر نرد منتظم مرة واحدة فإن احتمال ظهور عدد زوجي وظهور عدد فردي معًا يساوي

- (أ) $\frac{1}{6}$ (ب) صفر (ج) $\frac{1}{3}$ (د) $\frac{1}{6}$

٦ إذا ألقى حجر نرد منتظم ثلاث مرات متتالية فإن احتمال الحصول على ثلاثة أعداد متشابهة هو

- (أ) $\frac{1}{216}$ (ب) $\frac{1}{6}$ (ج) $\frac{5}{6}$ (د) $\frac{1}{6}$

٧ صندوق يحتوى على ١٠ كرات بيضاء ، ٥ كرات حمراء ، ٥ كرات سوداء فإذا
سُحبت كرة عشوائياً من الصندوق وكان احتمال أن تكون الكرة بيضاء $= \frac{1}{4}$ ،
وا احتمال أن تكون حمراء $= \frac{2}{5}$ فإن عدد الكرات السوداء =

- (أ) ٢٤ (ب) ٦ (ج) ٣٤ (د) ٤٠

٨ فى تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرتين متتاليتين فإن :

احتمال الحصول على العدد ٥ فى إحدى الرمتين والعدد ٦ فى الرمية الأخرى هو

- (أ) $\frac{1}{36}$ (ب) $\frac{1}{6}$ (ج) $\frac{1}{18}$ (د) $\frac{1}{9}$

٩ إذا سُحبت كرة عشوائياً من صندوق به ٣ كرات بيضاء ، ٥ كرات حمراء ، ٧ كرات
خضراء فإن احتمال أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء أو خضراء هو

- (أ) $\frac{1}{5}$ (ب) $\frac{2}{5}$ (ج) $\frac{7}{15}$ (د) $\frac{1}{3}$

١٠ إذا ألقى حجر نرد منتظم مرة واحدة ، فإن احتمال الحصول على عدد فردى
أقل من ٥ هو

- (أ) $\frac{2}{5}$ (ب) $\frac{1}{3}$ (ج) $\frac{1}{4}$ (د) $\frac{1}{5}$

١١ ألقى حجر نرد منتظم مرة واحدة على منضدة ، ولو حظ العدد الظاهر على وجهه
العلوى فإن احتمال ألا يزيد هذا العدد عن ٥ ولا يقل عن ٣ هو

- (أ) $\frac{1}{3}$ (ب) $\frac{1}{4}$ (ج) $\frac{1}{5}$ (د) $\frac{2}{5}$

١٢ ألقى قطعة نقود منتظمة مرة واحدة على سطح أفقى ، ولو حظ الوجه العلوى
فإن احتمال عدم ظهور الصورة يساوى

- (أ) صفر (ب) $\frac{1}{3}$ (ج) $\frac{1}{4}$ (د) ١

١٣ عند سحب بطاقة من ١٠ بطاقات متماثلة مرقمة من ١ إلى ١٠ ، فإن احتمال
ظهور عدد يقبل القسمة على ٣ على البطاقة هو

- (أ) ٠.٢ (ب) ٠.٣ (ج) ٠.٤ (د) ٠.٥

١٤ إذا أُختير حرفاً عشوائياً من حروف المجموعة :

ف = { ٢ ، ب ، ح ، د ، هـ ، و ، ز ، س ، ع ، م ، ن } فإن احتمال أن يكون هذا
الحرف هو أحد حروف كلمة مبروك هو

- (أ) $\frac{1}{4}$ (ب) $\frac{1}{3}$ (ج) $\frac{1}{5}$ (د) $\frac{2}{5}$

١٥ يحتوي صندوق على تسع بطاقات متماثلة تحمل الأرقام من ١ إلى ٩ ، اختيرت بطاقة عشوائياً ، فإن احتمال أن تحمل البطاقة المسحوبة رقماً يقسم العدد ٩ أوركماً فردياً هو

(١) $\frac{1}{3}$ (ب) $\frac{5}{9}$ (ج) $\frac{1}{4}$ (د) $\frac{5}{9}$

١٦ إذا كان A ، B حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية عناصرها ذات احتمالات متساوية ، وكان $P(A) = \frac{1}{4}$ ، $P(B) = \frac{1}{4}$ ، فإن :

(١) $P(A) = P(B)$ (ب) $P(A) < P(B)$

(ج) $P(A) > P(B)$ (د) $P(A) + P(B) = 1$

١٧ في تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرتين متتاليتين ، فإن احتمال الحصول على عدد زوجي في الرمية الأولى وعدد أولي في الرمية الثانية هو

(١) $\frac{1}{4}$ (ب) $\frac{1}{6}$ (ج) $\frac{1}{9}$ (د) $\frac{1}{8}$

١٨ ألقى قطعة نقود منتظمة مرتين متتاليتين. أوجد احتمالات الأحداث الآتية :

١ حدث «ظهور صورة في إحدى الرميتين».

٢ حدث «ظهور كتابة في الرمية الثانية».

٣ حدث «ظهور نفس الشيء في الرميتين».

٤ حدث «ظهور صورة واحدة على الأكثر».

$\frac{3}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}$

١٩ في تجربة إلقاء قطعة نقود منتظمة ثلاث مرات متتالية. أوجد احتمالات الأحداث الآتية :

١ حدث «ظهور صورتين على الأقل».

٢ حدث «ظهور كتابة واحدة فقط».

٣ حدث «ظهور كتابتين بالضبط».

٤ حدث «ظهور صورة في الرمية الأولى وكتابة في الرمية الثانية».

٥ حدث «ظهور صورتين متتاليتين على الأقل».

٦ و حدث «ظهور عدد فردي من الصور».

٧ نر حدث «ظهور كتابة على الأقل».

$\frac{3}{8} + \frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{1}{4}$

٢٠ في تجربة إلقاء قطعة نقود ثم حجر نرد وملاحظة الظاهر على الوجه العلوي لكل منهما أوجد احتمالات الأحداث الآتية :

١ حدث «ظهور كتابة وعدد فردي».

٢ حدث «ظهور عدد غير أولي».

(٢) حدث «ظهور صورة».

(١) حدث «ظهور كتابة أو عدد أصغر من ٣».

(٥) حدث «ظهور كتابة وعدد أصغر من ٣».

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$$

١٢ في تجربة إلقاء قطعة نقود ثم حجر نرد منتظم وملاحظة الوجه الظاهر لقطعة النقود والعدد الظاهر على الوجه العلوي لحجر النرد ، إذا كان A هو حدث ظهور صورة وعدد أولى ، B حدث ظهور عدد زوجي.

احسب احتمال وقوع كل من الحدثين A ، B ثم احسب كل من الأحداث الآتية :

(١) حدث «وقوع أحد الحدثين على الأقل» . (٢) حدث «وقوع الحدثين معاً» .

(٣) حدث «وقوع B فقط» . (٤) حدث «وقوع أحد الحدثين فقط» .

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$$

١٣ ألقى حجر نرد مرتين متتاليتين ولاحظ العدد الظاهر على الوجه العلوي في كل مرة. فإذا كان A هو حدث الحصول على عدد أكبر في الرمية الثانية من العدد الناتج في الرمية الأولى ، وكان B هو حدث أن يكون مجموع العددين الظاهرين أقل من ٨ ، أوجد كلاً من الاحتمالات الآتية :

$$(١) \text{ لـ } (A) \quad (٢) \text{ لـ } (B) \quad (٣) \text{ لـ } (A - B) \quad = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$$

١٤ صمم حجر نرد بحيث يكون وجهان فيه يحملان العدد ٢ ووجهان يحملان العدد ٤ ووجهان يحملان العدد ٦ ، فإذا ألقى هذا الحجر مرتين ، اكتب فضاء العينة لهذه التجربة ، وإذا كان A هو حدث ظهور العدد ٢ في الرمية الأولى ، B هو حدث أن يكون الفرق المطلق بين العددين في الرمتين هو ٢ فاكتب كلاً من الحدثين A ، B ثم أوجد كلاً من :

$$(١) \text{ لـ } (A \cap B) \quad (٢) \text{ لـ } (A \cup B) \quad (٣) \text{ لـ } (A \cap B) \quad = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$$

١٥ في تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرتين متتاليتين. احسب احتمال كل من الأحداث الآتية :

(١) حدث «مجموع العددين أقل من ٤ أو أكبر من ٨».

(٢) حدث «الفرق المطلق بين العددين ٣».

(٣) حدث «أحد العددين ثلاثة أمثال العدد الآخر».

(٤) حدث «ظهور عدد أقل من ٣ في الرمية الثانية».

- ٥) حدث «ظهور عدد أولى في الرمية الأولى وعدد أكبر من ٤ في الرمية الثانية».
- ٦) و حدث «متوسط العددين هو عدد زوجي».
- ٧) نر حدث «مجموع العددين أكبر من ١٢».
- ٨) ح حدث «حاصل ضرب العددين يقبل القسمة على ٣».

١٧ في تجربة إلقاء حجر نرد مرتين وملاحظة العدد الذي يظهر على الوجه العلوي في كل مرة احسب احتمال كل من الأحداث التالية :

- ٢ ﴿٢﴾ ب حدث «مجموع العددين في الرميتين يساوي ٨».
- ٣ ﴿٣﴾ ح حدث «مجموع العددين في الرميتين أقل من أو يساوي ٥».
- ٤ ﴿٤﴾ د حدث «مجموع العددين قابلاً للقسمة على ٦».
- ٥ ﴿٥﴾ ه حدث «الفرق المطلق بين العددين مساوياً عدداً أولياً».
- ٦ ﴿٦﴾ و حدث «ظهور الرقم ٣ مرة واحدة على الأقل».
- ٧ ﴿٧﴾ ز حدث «ظهور الرقم ٤ مرة واحدة على الأقل».

$$\frac{1}{8}, \frac{11}{36}, \frac{4}{9}, \frac{1}{7}, \frac{5}{18}, \frac{5}{36}, \frac{1}{7}$$

١٨ جبرا نرد متمييزان منتظمان أحدهما على أوجهه الأرقام ١، ١، ٢، ٢، ٣، ٣، ٤، ٤، ٥، ٥، فإذا ألقى الحجران مرة واحدة، والثاني على أوجهه الأرقام ٢، ٢، ٤، ٤، ٥، ٥، فأوجد احتمال كل من الأحداث الآتية :

- ٢ ب حدث «مجموع العديدين الظاهرين أكبر من أو يساوي ٧».
- ٣ ح حدث «مجموع العديدين زوجي».

١٩ من مجموعة الأرقام $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ كون عدد من رقمين مختلفين. احسب احتمال كل من الأحداث الآتية :

- ٢) ب حدث «أن يكون كل من رقمي الأحاد والعشرات أولياً».

٢٠ خمس بطاقات متماثلة مرقمة من ٢ إلى ٦ ، سحب بطاقة واحدة بعد الأخرى مع الإحلال ، وملاحظة الرقم المسجل عليها لتكوين جميع الأعداد الممكنة ذات الرقمين. أوجد احتمال :

١ أن يكون رقم الأحاد عدداً أولياً. ٢ أن يكون رقم العشرات عدداً فردياً.

٣ أن يكون رقم الأحاد عدداً أولياً أو رقم العشرات عدداً فردياً. $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}$

٢١ إذا كان ف فضاء عينة لتجربة عشوائية جميع نواتجها متساوية الإمكانات ، وكان $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{2}$ حدثين من ف ، $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$ ، $P(B) = \frac{1}{4}$ ، عدد النواتج التي تؤدي إلى وقوع الحدث $\frac{1}{4}$ يساوي ١٣ وعدد النواتج الممكنة للتجربة يساوي ٢٤ فأوجد :

١ احتمال وقوع الحدثين $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{2}$ معاً. ٢ احتمال وقوع أحد الحدثين دون الآخر.

٣ $P(A \cup B)$ $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}$

٢٢ فصل دراسي به ٤٠ طالباً ، نجح منهم ٣٠ طالباً في الفلسفة ، ٢٤ طالباً في التاريخ ، ٢٠ طالباً في الامتحانين ، فإذا اختير طالب عشوائياً. أوجد احتمال أن يكون الطالب المختار :

١ ناجحاً في الفلسفة. ٢ ناجحاً في التاريخ.

٣ ناجحاً في أحد الامتحانين على الأقل. ٤ راسباً في التاريخ.

٥ راسباً في الفلسفة والتاريخ. $\frac{3}{10}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{3}{10}, \frac{2}{5}$

٢٣ الربط بالرياضة : عينة عشوائية تتكون من ٦٠ شخصاً شملهم استطلاع للرأي ،

وجد أن ٤٠ شخصاً ، منهم يشجع نادي الهلال ، و ٢٨ شخصاً يشجع نادي النجمة ، وأن ٨ أشخاص لا يشجعون أيّاً من الناديين. إذا اختير شخص عشوائياً من أفراد العينة. فما احتمال أن يكون الشخص المختار من مشجعي :

١ أحد الناديين على الأقل. ٢ الناديين معاً.

٣ نادي الهلال فقط. ٤ أحد الناديين فقط. $\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{5}, \frac{1}{5}$

في الرمية الثانية.

الوجه العلوي في كل من

أوى ٥.

جى فى الرمية الثانية.

١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩، ١٠

١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩، ١٠

فى الحجران مرة واحدة

١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩، ١٠

١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩، ١٠

١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩، ١٠

١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩، ١٠

١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩، ١٠

١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩، ١٠

١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩، ١٠

١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩، ١٠

١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩، ١٠

١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩، ١٠

١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩، ١٠

١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩، ١٠

١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩، ١٠

B612

٢٤ فصل يتكون من ٢٤ ولدًا ، ١٦ بنتًا منها ٩ أولاد ، ٤ بنات يلبسون نظارة ، فإذا اختير عشوائيًا شخص من هذا الفصل. فأوجد احتمال أن يكون هذا الشخص :

١) بنتًا. ٢) ممن يلبسون نظارة.

٣) بنتًا تلبس نظارة. ٤) ولدًا لا يلبس نظارة.

٥) بنتًا أو ممن يلبسون نظارة. « $\frac{2}{5}$ ، $\frac{13}{40}$ ، $\frac{1}{10}$ ، $\frac{2}{8}$ ، $\frac{9}{8}$ »

٢٥ تقدم لمسابقة في الشعر للصف الثانى الثانوى بإحدى المدارس الثانوية المشتركة ٢٥

من الطلاب موزعين كما هو موضح بالجدول التالى.

أوجد احتمال أن يكون الفائز بالمركز الأول :

المجموع	علمي	أدبي	
١٥	٧	٨	طالب
١٠	٤	٦	طالبة
٢٥	١١	١٤	المجموع

١) طالبة.

٢) من القسم العلمى.

٣) طالب من القسم الأدبى.

٤) طالبة أو من القسم الأدبى.

« $\frac{18}{25}$ ، $\frac{8}{25}$ ، $\frac{11}{25}$ ، $\frac{2}{5}$ »

٢٦ كتب طارق ٧٥ خطابًا على الآلة الكاتبة ، فوجد أن ٦٠٪ منها بلا أخطاء ، وكتب زياد

٢٥ خطابًا أخرى ، فوجد أن ٨٠٪ منها بلا أخطاء ، فإذا اختير خطاب عشوائيًا مما تم

كتابته بواسطة طارق وزياد. فأوجد احتمال أن يكون هذا الخطاب :

١) بلا أخطاء.

٢) زياد هو الذى كتب الخطاب.

٣) زياد لم يخطئ فى كتابته.

٤) طارق قد أخطأ فى كتابته.

« ٠.٦٥ ، ٠.٢٥ ، ٠.٢ ، ٠.٢ »

٢٧ إذا كان ٢ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ، وكان عدد النواتج التى تؤدى إلى وقوع

الحدث ٢ يساوى ١٢ ، وعدد النواتج التى تؤدى إلى وقوع الحدث ب يساوى ١٦ ، وعدد النواتج

التي تؤدى إلى قوع الحدثين ٢ ، ب معًا يساوى ٨ ، وكان $P(A \cup B) = \frac{2}{5}$ فأوجد :

١) $P(A \cap B)$

٢) $P(A \cup B)$

« $\frac{13}{25}$ ، $\frac{21}{25}$ »

يتميز هذا الكتاب
• الجزء الخاص بالامتحانات
• الجزء الخاص بالإجابات



مركز الأستاذ محمد عبد الحليم
مكتبة الأستاذ محمد عبد الحليم



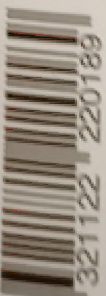
2

ثانوي
2020

الآن
بالمكتبات

في: **المكتبة**

- الرياضيات البحتة (علمي)
- الرياضيات العامة (أدبي)
- اللغة الإنجليزية
- اللغة الفرنسية
- للصف الثاني الثانوي



5 321122 220189



/ElMoasser.eg

مكتبة الطلبة

للطباعة والنشر والتوزيع

٣ شارع كامل صدقي - الفجالة

تليفون: ٢٥٩٢٩٩٧ - ٢٥٩٣٧٧٩١ - ٢٢٢٥٩٣٤١٢

E-mail: info@elmoasserbooks.com

www.elmoasserbooks.com

